



PENERBIT ANDI®

# Dasar-dasar Getaran Mekanis

Tungga BK

STAKAAN  
SIPAN  
A TIMUR

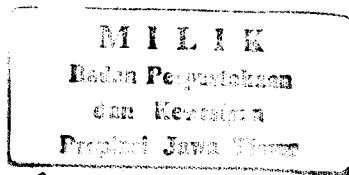
6

# **DASAR-DASAR GETARAN MEKANIS**

Tungga Bhimadi Karyaasa

Penerbit ANDI Yogyakarta

Dasar-dasar Getaran Mekanis  
Oleh: Tungga BK



Hak Cipta © 2011 pada Penulis

Editor : Fl. Sigit Suyantoro  
Setting : Sri Mulanto  
Desain Cover : Bowo  
Korektor : Suci Nurasih / Aktor Sadewa

Hak Cipta dilindungi undang-undang.  
Dilarang memperbanyak atau memindahkan sebagian atau seluruh isi buku ini dalam bentuk apapun, baik secara elektronis maupun mekanis, termasuk memfotocopy, merekam atau dengan sistem penyimpanan lainnya, tanpa izin tertulis dari Penulis.

Penerbit: C.V ANDI OFFSET (Penerbit ANDI)  
Jl. Beo 38-40, Telp. (0274) 561881 (Hunting), Fax. (0274) 588282 Yogyakarta 55281

Percetakan: ANDI OFFSET  
Jl. Beo 38-40, Telp. (0274) 561881 (Hunting), Fax. (0274) 588282 Yogyakarta 55281

**Perpustakaan Nasional: Katalog dalam Terbitan (KDT)**

Tungga BK

Dasar-dasar Getaran Mekanis/Tungga BK;

— Ed. I. — Yogyakarta: ANDI,

20 19 18 17 16 15 14 13 12 11

xvi + 288 hlm. ; 16 x 23 Cm.

10 9 8 7 6 5 4 3 2 1

ISBN: 978 - 979 - 29 - 1683 - 6

I. Judul

1. Mechanical Vibration

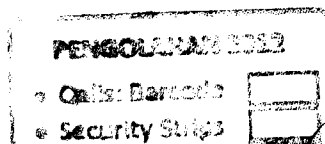
DDC'21 : 620.3

## KATA PENGANTAR

Puji syukur kepada Tuhan Pencipta Alam saya panjatkan dengan terbitnya Buku *Dasar Dasar Getaran Mekanis* ini, setelah melalui proses penyusunan, penyuntingan, koreksi pada keseluruhan buku. Yang menggembirakan, buku ini dipublikasikan untuk menghilangkan kesan bagi sebagian dosen terutama mahasiswa bahwa mendalami *Vibratin Engineering* itu sulit. Lebih dari itu, diharapkan buku ini menjadi pegangan dalam mengawali untuk mengenal teknik getaran sehingga berguna selain untuk mahasiswa juga bagi dosen, peneliti, konsultan, dan masyarakat umum yang interest terhadap bidang engineering ini. Paling tidak, hal ini akan memberi pola urutan baru dalam pembelajaran untuk memperluas pengetahuan getaran.

Buku Dasar Dasar Getaran Mekanis merupakan dasar yang perlu dikuasai bagi yang akan mengembangkan teknik getaran dari awal dengan pemahaman fenomena getaran menjadi persamaan model. Sampai saat ini, model getaran dilakukan untuk dua kelompok yaitu kondisi *Lamp Mass* dan *Continous Mass*. Buku ini membahas pemodelan untuk *Lamp mass*, dengan benda dimodelkan sebagai satu atau lebih massa masif yang ditumpu atau saling dihubungkan dengan idealisasi sebagai *pegas dan damper*. Riil sambungan antara lain dapat berupa klem, pegas daun dan atau shock, kontak punggung orang dengan jok, atau fondasi mesin. Dalam buku ini akan disampaikan analisa dari model getaran *Single Degree of Freedon* atau SDOF, untuk dua benda dengan DDOF, dan Multy DOF. Eksitasi untuk model antara lain dapat berupa idealisasi gaya harmonik, trigoneometri, dan fungsi step.

Buku ini juga merayakan bagaimana membuat model *Lamp Mass* dari berbagai benda sesuai kepentingan analisa yang diinginkan, misalnya elastisitas ban yang dipentingkan maka model getaran dibuat berlainan dengan jika chasisnya yang dipentingkan. Ibarat pepatah mengatakan *Bersakit-sakit Dahulu Bersenang Kemudian* bagi pecinta teknik getaran, kesabaran yang



dilakukan dengan tekun dan teliti antara lain dari membaca buku ini, dapat menghasilkan pemahaman utuh getaran dan dapat melakukan penerapan model dari jawab permasalahan fenomena riil.

Ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya saya sampaikan kepada semua pihak yang membantu dan ikut mengoreksi dalam proses pembuatan buku ini yaitu, staf dan karyawan ANDY OFFSET, Bapak Indra Herlamba, Bapak Mansyur, dan Bapak Ali Khomsah. Kritik, saran, dan masukan yang berguna untuk penerbitan selanjutnya, sangat ditunggu. Semoga buku ini bermanfaat.

Surabaya, Nopember 2010

Tungga Bhimadi Karya

## DAFTAR ISI

|                                                           |             |
|-----------------------------------------------------------|-------------|
| <b>KATA PENGANTAR .....</b>                               | <b>iii</b>  |
| <b>DAFTAR ISI .....</b>                                   | <b>v</b>    |
| <b>DATAR GAMBAR .....</b>                                 | <b>ix</b>   |
| <b>DAFTAR TABEL .....</b>                                 | <b>xiii</b> |
| <b>BAB 1 PENDAHULUAN .....</b>                            | <b>1</b>    |
| 1.1 Sejarah Perkembangan Getaran Mekanis .....            | 1           |
| 1.2 Konsep Dasar Getaran Mekanis .....                    | 5           |
| 1.3 Pembebanan dan Klasifikasi Getaran .....              | 13          |
| 1.4 Prosedur Analisis Getaran .....                       | 16          |
| 1.5 Model Getaran Sesuai Kebutuhan .....                  | 20          |
| 1.6 Elemen Pegas .....                                    | 22          |
| 1.7 Elemen Massa atau Inersia .....                       | 28          |
| 1.8 Elemen Peredam .....                                  | 31          |
| 1.9 Ringkasan .....                                       | 37          |
| 1.10 Pertanyaan untuk Pemahaman .....                     | 38          |
| 1.11 Soal .....                                           | 39          |
| <b>BAB 2 GETARAN BEBAS SISTEM SATU DERAJAT</b>            |             |
| <b>KEBEBASAN .....</b>                                    | <b>45</b>   |
| 2.1 Pendahuluan .....                                     | 45          |
| 2.2 Getaran Bebas Tak Teredam SDOF .....                  | 52          |
| 2.3 Getaran Bebas SDOF dengan Viscous Damping .....       | 60          |
| 2.4 Getaran Bebas SDOF Coulomb Damping .....              | 79          |
| 2.5 Ringkasan .....                                       | 85          |
| 2.6 Pertanyaan untuk Pemahaman .....                      | 85          |
| 2.7 Soal .....                                            | 86          |
| <b>BAB 3 EKSITASI SISTEM SATU DERAJAT KEBEBASAN .....</b> | <b>93</b>   |
| 3.1 Pendahuluan .....                                     | 93          |
| 3.2 Eksitasi Harmonik SDOF dengan Beda Phase .....        | 96          |
| 3.3 Eksitasi Harmonik SDOF Tanpa Beda Phase .....         | 104         |
| 3.4 Respons SDOF dengan Eksitasi Harmonik Base .....      | 110         |



|              |                                                             |            |
|--------------|-------------------------------------------------------------|------------|
| 3.5          | SDOF Tereadam Eksitasi dari Mesin Tidak Balance.....        | 118        |
| 3.6          | SDOF Tereadam oleh Coulomb Damping .....                    | 123        |
| 3.7          | SDOF dengan Eksitasi Beban Impuls .....                     | 126        |
| 3.8          | SDOF dengan Eksitasi Deret Fourier .....                    | 129        |
| 3.9          | Ringkasan .....                                             | 134        |
| 3.10         | Pertanyaan untuk Pemahaman.....                             | 135        |
| 3.11         | Soal.....                                                   | 136        |
| <b>BAB 4</b> | <b>GAYA EKSITASI PADA SISTEM SATU</b>                       |            |
|              | <b>DERAJAT KEBEBASAN.....</b>                               | <b>143</b> |
| 4.1          | Eksitasi Berupa Impuls.....                                 | 143        |
| 4.2          | Eksitasi Gaya Berganti-ganti Selang.....                    | 149        |
| 4.3          | Getaran Akibat Eksitasi Landasan .....                      | 158        |
| 4.4          | Solusi dengan Transformasi Laplace .....                    | 162        |
| 4.5          | Ringkasan .....                                             | 166        |
| 4.6          | Pertanyaan untuk Pemahaman .....                            | 166        |
| 4.7          | Soal.....                                                   | 167        |
| <b>BAB 5</b> | <b>Sistem Getaran Dua Derajat Kebebasan .....</b>           | <b>173</b> |
| 5.1          | Persamaan Getaran Dengan Metode Newton .....                | 173        |
| 5.2          | Solusi Transien DDOF Sistem Tak teredam.....                | 179        |
| 5.3          | DDOF untuk Getaran Torsi .....                              | 189        |
| 5.4          | Getaran Paksa DDOF dengan Solusi Impedansi dan Invers ..... | 192        |
| 5.5          | Getaran Paksa DDOF dengan Solusi Metode Rayleigh ...        | 196        |
| 5.6          | Ringkasan .....                                             | 203        |
| 5.7          | Pertanyaan untuk Pemahaman .....                            | 203        |
| 5.8          | Soal .....                                                  | 204        |
| <b>BAB 6</b> | <b>SISTEM GETARAN MDOF.....</b>                             | <b>211</b> |
| 6.1          | MDOF pada Sistem Pegas-Massa .....                          | 211        |
| 6.2          | Persamaan Lagrange untuk Persamaan Getaran .....            | 213        |
| 6.3          | Getaran Bebas pada Sistem MDOF .....                        | 221        |
| 6.4          | Getaran Paksa pada Sistem MDOF.....                         | 227        |
| 6.5          | Ringkasan .....                                             | 230        |
| 6.6          | Pertanyaan untuk Pemahaman .....                            | 230        |
| 6.7          | Soal .....                                                  | 231        |

|              |                                                        |            |
|--------------|--------------------------------------------------------|------------|
| <b>BAB 7</b> | <b>JAWAB PERMASALAHAN MODEL GETARAN</b>                |            |
|              | <b>DENGAN BANTUAN MATLAB.....</b>                      | <b>237</b> |
| 7.1          | Pendahuluan .....                                      | 237        |
| 7.2          | Perintah Dasar Operasi MATLAB .....                    | 240        |
| 7.3          | Operator Aritmatika dan Fungsi Matematika MATLAB ..... | 241        |
| 7.4          | Operator Relasi dan Logika .....                       | 243        |
| 7.5          | Array .....                                            | 244        |
| 7.6          | Operasi Matriks.....                                   | 246        |
| 7.7          | Visualisasi Grafik .....                               | 251        |
| 7.8          | Jawab Permasalahan Getaran dengan MATLAB .....         | 254        |
| 7.9          | Ringkasan .....                                        | 277        |
| 7.10         | Soal .....                                             | 277        |
|              | <b>DAFTAR PUSTAKA .....</b>                            | <b>281</b> |

## DAFTAR GAMBAR

|             |                                                    |    |
|-------------|----------------------------------------------------|----|
| Gambar 1.1  | Getaran sederhana dari ayunan pendulum .....       | 7  |
| Gambar 1.2  | Contoh idealisasi getaran SDOF .....               | 10 |
| Gambar 1.3  | Contoh sistem dengan 2-derajat kebebasan .....     | 10 |
| Gambar 1.4  | Contoh sistem dengan 3-derajat kebebasan .....     | 11 |
| Gambar 1.5  | Contoh batang SDOF tak berhingga .....             | 12 |
| Gambar 1.6  | Contoh eksitasi deterministik dan random.....      | 16 |
| Gambar 1.7  | Model Forging Hammer .....                         | 18 |
| Gambar 1.8  | Idealisasi model sistem suspensi mobil .....       | 20 |
| Gambar 1.9  | Idealisasi model sistem kenyamanan sopir-2D .....  | 21 |
| Gambar 1.10 | Idealisasi sistem pegas-damper mobil-3D .....      | 21 |
| Gambar 1.11 | Kombinasi pegas seri dan paralel .....             | 22 |
| Gambar 1.12 | Hosting Drum.....                                  | 24 |
| Gambar 1.13 | Crane pengangkut beban.....                        | 26 |
| Gambar 1.14 | Cantilever dengan massa di ujung .....             | 28 |
| Gambar 1.15 | Idealisasi gedung bertingkat sistem MDOF .....     | 29 |
| Gambar 1.16 | Massa translasi dengan rigid body .....            | 30 |
| Gambar 1.17 | Massa bertranslasi dan berotasi.....               | 31 |
| Gambar 1.18 | Hysteresis loop untuk material elastik .....       | 33 |
| Gambar 1.19 | Plat paralel dengan fluida viscous.....            | 34 |
| Gambar 1.20 | Dashpot .....                                      | 35 |
| Gambar 2.1  | Sistem pegas-massa posisi horizontal .....         | 47 |
| Gambar 2.2  | Idealisasi rangka gedung .....                     | 48 |
| Gambar 2.3  | Gaya dan momen eksternal pada body ekuivalen ..... | 50 |
| Gambar 2.4  | Free Body Diagram Contoh 2.1 .....                 | 50 |
| Gambar 2.5  | Free Body Diagram Contoh 2.2 .....                 | 51 |
| Gambar 2.6a | Diagram Benda Bebas getaran massa-pegas.....       | 52 |
| Gambar 2.6b | Sistem pegas-massa tanpa peredaman .....           | 53 |
| Gambar 2.6c | Respons getaran bebas SDOF .....                   | 57 |

|              |                                                                                             |     |
|--------------|---------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Gambar 2.7a  | Beban pada bentang Hoist .....                                                              | 59  |
| Gambar 2.7b  | Sistem Pegas – Massa redaman viscous .....                                                  | 61  |
| Gambar 2.8   | Getaran teredam $\zeta < 1.0$ .....                                                         | 65  |
| Gambar 2.9a  | Getaran dengan redaman kritis $\zeta = 1.0$ .....                                           | 67  |
| Gambar 2.9b  | Redaman kritis $\zeta = 1.0$ dengan variasi kecepatan .....                                 | 67  |
| Gambar 2.9c  | Simpangan aperiodik dengan $\zeta > 1.0$ .....                                              | 68  |
| Gambar 2.10a | Respon getaran bebas SDOF .....                                                             | 69  |
| Gambar 2.10b | Laju pengurangan osilasi .....                                                              | 70  |
| Gambar 2.10c | Penurunan logaritmik sebagai fungsi- $\zeta$ .....                                          | 71  |
| Gambar 2.10d | Penurunan logaritmik dengan $\delta = \frac{1}{n} \ln \left( \frac{x_o}{x_n} \right)$ ..... | 73  |
| Gambar 2.10e | Laju pengurangan osilasi redaman kecil .....                                                | 74  |
| Gambar 2.11  | Sket respon getaran SDOF .....                                                              | 75  |
| Gambar 2.12  | Sket dan respon getaran soal 2.2 .....                                                      | 78  |
| Gambar 2.13  | Free body diagram Coulomb damping .....                                                     | 82  |
| Gambar 2.14  | Plot persamaan 2.60 dan 2.61 .....                                                          | 83  |
| Gambar 3.1   | Sistem redaman pegas-masa SDOF .....                                                        | 95  |
| Gambar 3.2   | Simpangan sistem redaman pegas-massa .....                                                  | 96  |
| Gambar 3.3   | Kurva amplitudo rasio SDOF tanpa redaman .....                                              | 98  |
| Gambar 3.4   | Displacement dari beda fase eksitasi harmonik $0 < \omega/\omega_n < 1$ .....               | 98  |
| Gambar 3.5   | Displacement dari beda fase eksitasi harmonik $\omega/\omega_n > 1$ .....                   | 99  |
| Gambar 3.6   | Kurva SDOF tanpa redaman kondisi resonansi .....                                            | 100 |
| Gambar 3.7   | Respon total frekuensi natural eksitasi harmonik SDOF .....                                 | 101 |
| Gambar 3.8   | Rasio eksitasi massa SDOF .....                                                             | 103 |
| Gambar 3.9   | Skema sistem pompa torak .....                                                              | 104 |
| Gambar 3.10  | Variasi 'x dan $\Phi$ ' dengan r .....                                                      | 106 |
| Gambar 3.11  | SDOF eksitasi dari displacement Base .....                                                  | 111 |
| Gambar 3.12  | Kurva respon frekuensi getaran SDOF Base .....                                              | 114 |
| Gambar 3.13  | Variasi-z/y terhadap frekuensi rasio .....                                                  | 115 |
| Gambar 3.14  | Gerakan vertikal mobil eksitasi displacement jalan .....                                    | 116 |
| Gambar 3.15  | Penyanggah massa putar tidak <i>balance</i> .....                                           | 119 |
| Gambar 3.16  | Rotating unbalanced masses .....                                                            | 121 |
| Gambar 3.17  | SDOF dengan Coulomb damping dan eksitasi gaya .....                                         | 123 |
| Gambar 3.18  | Asumsi beban Impact sebagai eksitasi .....                                                  | 127 |
| Gambar 3.19  | Asumsi delta waktu impact sebesar $\delta$ .....                                            | 128 |

|             |                                                                           |     |
|-------------|---------------------------------------------------------------------------|-----|
| Gambar 4.1  | Diskritisasi interval 0 sampai t durasi $A=t/n$ .....                     | 144 |
| Gambar 4.2  | Eksitasi gaya untuk contoh 4.2 .....                                      | 148 |
| Gambar 4.3  | Variasi fungsi step eksitasi gaya untuk contoh 4.3 .....                  | 150 |
| Gambar 4.4  | Breakdown eksitasi dari gambar 4.3 menjadi fungsi dengan unit step .....  | 152 |
| Gambar 4.5a | Respon dinamik tak teredam eksitasi impuls dan step delay .....           | 153 |
| Gambar 4.5b | Respon dinamik tak teredam eksitasi Sinus, delay, ramp-eksponensial ..... | 154 |
| Gambar 4.6  | Pulsa segitiga serta breakdown dari contoh 4.5 .....                      | 155 |
| Gambar 4.7  | Plot solusi respon dinamik untuk soal 4.5 .....                           | 157 |
| Gambar 4.8  | Pulsa kecepatan untuk contoh 4.6 .....                                    | 159 |
| Gambar 5.1  | Tiga contoh sistem dua derajat kebebasan .....                            | 174 |
| Gambar 5.2  | Sistem pegas-redaman dua derajat kebebasan .....                          | 177 |
| Gambar 5.3  | Sket untuk contoh 5.1 .....                                               | 185 |
| Gambar 5.4  | Perpindahan pada massa $m_1$ dan $m_2$ .....                              | 187 |
| Gambar 5.5  | Sistem torsional dua derajat kebebasan .....                              | 190 |
| Gambar 5.6  | Getaran torsional DDOF untuk contoh 5.3 .....                             | 191 |
| Gambar 5.7  | Sistem torsional DDOF untuk contoh 5.4 .....                              | 194 |
| Gambar 5.8  | Sistem getaran DDOF tanpa redaman .....                                   | 196 |
| Gambar 6.1  | Sistem pegas-massa MDOF .....                                             | 212 |
| Gambar 6.2  | Sistem pegas-massa untuk soal 6.1 .....                                   | 215 |
| Gambar 6.3  | Sistem pegas-massa-redaman untuk soal 6.2 .....                           | 217 |
| Gambar 6.4  | Sistem pegas-massa untuk soal 6.3 .....                                   | 222 |
| Gambar 6.5  | Model suspensi otomotif untuk soal 6.4 .....                              | 225 |
| Gambar 6.6  | Sket dari contoh 6.5 .....                                                | 229 |
| Gambar 7.1  | Start awal MATLAB .....                                                   | 239 |
| Gambar 7.2  | Window MATLAB .....                                                       | 239 |
| Gambar 7.3  | Jawaban permasalahan MATLAB contoh 7.1 .....                              | 241 |
| Gambar 7.4  | Vektor kolom MATLAB .....                                                 | 245 |
| Gambar 7.5  | Hasil input untuk matriks A dan B .....                                   | 246 |
| Gambar 7.6  | Perkalian dan penjumlahan A dan B .....                                   | 250 |
| Gambar 7.7  | Hasil operasi aritmatika fungsi invers .....                              | 250 |
| Gambar 7.8  | Hasil plot fungsi $y=1-\cos 2x$ dan $y=e^x$ .....                         | 253 |
| Gambar 7.9  | Notepad dan menyimpan m-file .....                                        | 254 |
| Gambar 7.10 | Skema problem getaran contoh 7.6 .....                                    | 255 |
| Gambar 7.11 | Hasil plot dari contoh 7.6a .....                                         | 257 |
| Gambar 7.12 | Hasil plot dari contoh 7.6b .....                                         | 257 |
| Gambar 7.13 | Hasil plot respons dari contoh 7.7 .....                                  | 258 |

|             |                                                |     |
|-------------|------------------------------------------------|-----|
| Gambar 7.14 | Hasil plot respons dari contoh 7.8 .....       | 259 |
| Gambar 7.15 | Model suspensi otomotif.....                   | 260 |
| Gambar 7.16 | Hasil plot respons contoh 7.9.....             | 262 |
| Gambar 7.17 | Skema sistem contoh 7.10.....                  | 263 |
| Gambar 7.18 | Free body diagram sistem contoh 7.10 .....     | 263 |
| Gambar 7.19 | Respons sistem getaran dari contoh 7.10 .....  | 271 |
| Gambar 7.20 | Model suspensi otomotif dari contoh 7.11 ..... | 271 |
| Gambar 7.21 | Skema sistem getaran contoh 7.12.....          | 273 |
| Gambar 7.22 | Respons getaran problem 7.12 .....             | 275 |
| Gambar 7.23 | Sistem 3 derajat kebebasan contoh 7.13 .....   | 276 |

## DAFTAR TABEL

|            |                                                  |     |
|------------|--------------------------------------------------|-----|
| Tabel 1.1  | Jumlah beban sesuai analisis kekuatan .....      | 14  |
| Tabel 7.1  | Perintah dasar MATLAB.....                       | 240 |
| Tabel 7.2  | Simbol operator aritmatika MATLAB .....          | 241 |
| Tabel 7.3  | Fungsi matematika standar MATLAB .....           | 242 |
| Tabel 7.4  | Fungsi operasi bilangan kompleks MATLAB.....     | 243 |
| Tabel 7.5  | Operasi relasi MATLAB .....                      | 243 |
| Tabel 7.6  | Operasi logika MATLAB .....                      | 244 |
| Tabel 7.7  | Operasi aritmatika matriks .....                 | 249 |
| Tabel 7.8  | Fungsi bawaan MATLAB untuk plot data x-y .....   | 251 |
| Tabel 7.9  | Style option dari fungsi plot .....              | 252 |
| Tabel 7.10 | Fungsi bawaan MATLAB untuk plot data x-y-z ..... | 253 |



# BAB 1

## PENDAHULUAN

Kompetensi yang ingin dicapai dengan mempelajari bab ini adalah:

1. Mampu membedakan model dengan sistem satu, dua, atau lebih, dari derajat kebebasan.
2. Mampu memodelkan getaran Lump Mass satu sistem, berbasis derajat kebebasan.
3. Mampu memahami elemen dasar dari model sistem getaran yang terdiri dari elemen pegas, elemen inersia, dan elemen redaman.
4. Mampu melakukan analisis getaran riil sederhana menjadi model elemen dasar sistem getaran.

### 1.1 Sejarah Perkembangan Getaran Mekanis

*Mechanical Vibration* atau Getaran Mekanis merupakan suatu istilah yang kemunculannya telah melalui proses panjang. Untuk memahami getaran mekanis, orang terlebih dahulu harus memahami makna mekanika sebagai cabang ilmu pengetahuan, karena getaran merupakan salah satu fenomena dari mekanika. Tinjauan sejarah perkembangan mekanika dan getaran tidak lepas dari dua aspek, yaitu hukum alam dan rekayasa. Yang menarik dalam sejarah hukum alam dan rekayasa, apabila kita fokus pada runtuhnya peradaban Islam abad ke-3, hampir semua pakar mekanika terlebih dahulu membahas interpretasi hukum alam, aksioma, uraian, bahkan rumus matematika. Dan hal ini dilakukan terlebih dahulu sebelum membahas rekayasa, aplikasi, serta hubungan dari masing-masing hukum alam tersebut. Bahkan, tinjauan terhadap hukum alam pada abad ke-3 dilakukan sampai pada esensi yang paling dalam, yaitu filosofi.

Perkembangan ilmu getaran mekanis diawali dari penemuan **Galileo** mengenai hubungan antara panjang pendulum dan frekuensi ayunan

pendulum. Pengamatannya dilakukan terhadap resonansi, dengan identitas dua benda yang dihubungkan oleh tali sebagai energi yang ditransfer pada frekuensi yang sama. Galileo menemukan hubungan antara densitas, tegangan, panjang, dan frekuensi ayunan sebagai getaran kawat.

Setelah **Newton** menyampaikan empat hukum mekanika, belum muncul pembagian teknik getaran sebagai bagian ilmu fisika ini. Sekarang, fisika sebagai *basic* atau dasar getaran sudah menyatakan pembagian fisika menjadi statika dan dinamika. **Hukum Newton ke-3** tentang aksi-reaksi merupakan prinsip dasar yang awalnya dianggap sepele dan kurang populer untuk aplikasi mekanika komputasi, sehingga tidak sedikit pakar yang meninggalkan prinsip tersebut karena dianggap membingungkan, sama halnya pemahaman tentang hukum Newton ke-2 tentang kelembaman. Istilah kelembaman dipopulerkan oleh **D'Alembert** yang memberikan inspirasi penyusunan persamaan keseimbangan kondisi statik dan dinamik statik, misalnya struktur rangka yang disebut sebagai struktur statik tertentu. Penyelesaian struktur statik tertentu yang hanya mengandalkan persamaan keseimbangan dan tidak melibatkan metode tambahan, seperti metode kekakuan dan metode superposisi, merupakan hukum dasar yang memberikan kontribusi sangat besar dalam perkembangan penerapan getaran mekanis.

Faktor lain yang juga menjadi peletak arah evaluasi mekanika getaran adalah asumsi pegas-damper (kondisi riil ini tidak ada). Asumsi ini digunakan untuk memodelkan semua fenomena getaran sesuai kondisi benda, yaitu asumsi bahwa benda mempunyai hanya dua parameter yaitu: konstanta untuk pegas, dan konstanta untuk damper.

Sejumlah pakar selain fokus untuk persoalan getaran, yaitu pakar matematika, seperti **Taylor, Bernoulli, D'Alembert, Euler, Lagrange** dan **Fourier** juga memberikan kontribusi berharga bagi pengembangan teori getaran. Bernoulli sebagai yang pertama kali mengajukan teori *linier superposisi* dari getaran harmonik sederhana balok, dan balok tersebut ditumpu pegas. Perumusan matematika untuk model getaran dengan pegas ini diawali pada tahun 1751. Kemudian, Bernoulli mengembangkan persamaan diferensial untuk getaran arah lateral dari batang primatik dan menggunakan persamaan itu untuk mendapatkan solusi pada kasus defleksi yang kecil. Pada tahun 1798 **Coulumb** melakukan penelitian baik secara teoretik maupun eksperimen untuk osilasi torsional dari sebuah logam yang digantung oleh sebuah kawat.

Ada hal yang menarik dari cerita perkembangan teori getaran dari sebuah plat. Pada tahun 1802 **Chladni** mengembangkan sebuah metode dengan meletakkan pasir pada permukaan plate yang bergetar. Dia menemukan suatu pola yang menarik dan indah pada pasir yang diletakkan pada plat yang sedang bergetar itu. Penelitian getaran pada plate dilanjutkan oleh ilmuwan Jerman, **Sophie**, dengan mengembangkan persamaan matematika getaran pada plat tersebut tahun 1816. Kemudian persamaan getaran disempurnakan oleh **Kirchhoff** pada tahun 1850. Meskipun kita belum tahu siapa yang memulai, hukum getaran **Rudolf Herz** tentang fenomena getaran sebagai proyeksi gerak melingkar pada bidang datar. Persepsi Herz tentang rambatan getaran ini pada media udara merupakan sumbangan yang tidak kalah penting untuk gelombang. Nama **Newton** dan **Herz** layak diabadikan untuk satuan turunan dalam mekanika, yaitu gaya atau beban dengan simbol '**N**' dan frekuensi dengan simbol '**Hz**'. Definisi getaran mengikuti istilah fisika, yaitu wujud dari proyeksi gerak melingkar dalam bidang datar yang menghasilkan gerakan bolak-balik atau osilasi pada garis diameter yang selalu melalui pusat gerak lingkaran sebelumnya. Garis dari gerak bolak-balik hanya memiliki dua kemungkinan, yaitu dua garis saling menyilang dengan sudut 90 derajat. Apabila salah satu garis yang vertikal disebut osilasi getaran transversal, maka osilasi dalam garis horizontal disebut osilasi getaran longitudinal.

Setelah itu penelitian mengenai getaran berfokus pada mekanikal praktis dan struktur. Pada tahun 1877 **Rayleigh** mempublikasikan bukunya yang membahas teori suara. Buku ini mempertimbangkan teori klasik dari getaran. Kontribusi dari Rayleigh yang perlu dicatat adalah metode yang ditemukannya untuk menentukan secara fundamental frekuensi getaran dari sebuah sistem konservatif dengan menerapkan prinsip konservasi energi. Metode ini sekarang dikenal dengan metode Rayleigh. Pada tahun 1902 **Frahm** menyelidiki pentingnya getaran torsional dalam perancangan poros propeller kapal uap. Peredam getaran dinamik yang melibatkan tambahan sistem spring-mass untuk menghilangkan getaran sistem utama dikemukakan oleh Frahm pada tahun 1909. Sejumlah kontributor pada abad modern, seperti **Stodola, Timoshenko** dan **Midlin** juga perlu dicatat. Metode Stodola digunakan untuk menganalisis getaran batang pejal yang juga dapat diaplikasikan pada bilah turbin. Timoshenko dan Midlin memperbaiki teori getaran pada batang pejal dan plat. Para pakar kembali menyadari bahwa fenomena resonansi antara perhitungan teori dan yang terjadi secara riil pada benda harus diperhitungkan. Pernyataan ini muncul dari penelitian **Dankerley** pada

tahun 1915 yang menyampaikan bahwa formulasi frekuensi pribadi batang yang ditumpu jepit dapat diperoleh sampai orde reformasi tak terbatas. Penentuan frekuensi ini disebut dengan Metoda Dankerley.

Persoalan getaran berkembang tidak hanya pada masalah idealisasi dan kepraktisan, tetapi juga pada akurasi perhitungan. Misalnya, akurasi pertama fokus pada solusi getaran sederhana sebagai pendekatan linear. Beberapa contoh lainnya menggunakan model getaran non-linear. Perbedaan linear dan non-linear ditentukan dari fenomena elastisitas dan plastisitas dalam uji tarik material. Getaran mendekati kondisi non-linear manakala terjadi plastisitas bahan. Sudah lama ditemukan bahwa banyak permasalahan dasar dari mekanika, termasuk getaran, adalah non-linier. Meskipun pendekatan secara linier masih dapat diadopsi dalam kebanyakan kasus, namun bagaimanapun tetap tidak mampu untuk mencakup semua kasus. Pada kasus non-linier ada beberapa fenomena yang secara teoretis tidak mungkin terjadi pada kasus linier. Pengembangan model matematika non-linier pada teori getaran pertama sekali dikembangkan oleh **Poincare** dan **Lyapunov** pada akhir abad ke-19, namun baru pada tahun 1920 **Duffing** dan **Van der Pol** mampu mendefinisikan solusi matematika untuk teori getaran non-linier. Dalam kurun 20 tahun terakhir penulis buku yang membahas soal getaran, seperti Monorsky dan Stoker, menuangkan hasil perhitungan getaran non-linier dalam sebuah monograf.

Karakteristik getaran random terjadi pada fenomena gempa bumi, angin, dan kebisingan yang berasal dari mesin. Fenomena tersebut merupakan suatu hal yang menarik untuk diteliti. Penelitian di bidang ini mulai tampak setelah **Wiener** dan **Khinchin** pada awal tahun 1930 mengaplikasikan deret Taylor pada *spectral density*. Paper yang dipublikasikan **Lin** dan **Rice** antara tahun 1943 dan 1945 menentukan arah ilmu getaran random pada tataran praktis guna memecahkan permasalahan dalam ilmu rekayasa. Monograf yang dibuat oleh **Crandall, Mark** dan **Robson** secara sistematis menunjukkan eksistensi dari teori getaran random.

Sampai akhir Perang Dunia II, perkembangan ilmu getaran masih pada kasus beberapa derajat kebebasan. Namun setelah ditemukannya komputer pada tahun 1950, yang memungkinkan untuk membuat sistem kompleks yang lebih moderat, hal itu membangkitkan solusi untuk pendekatan masalah dalam bentuk *perhitungan numerik* dengan *program looping*. Pengembangan secara simultan dari metode elemen hingga membuat rekayasawan mampu menggunakan komputer untuk mendapatkan solusi secara numerik dari

analisis getaran kompleks sistem mekanis, struktur, ataupun kendaraan. Sebut saja, perkembangan kapasitas CPU dan pengecilan dimensi PC. Kapasitas CPU untuk PC dari 120 MB tahun 1985 sebagai komputer mini, sampai 10 GB pada tahun 1988 yang diagungkan saat itu dengan istilah *cray-2*. Kedua komputer ini menempati ruang CPU sebesar lemari besi. Bandingkan dengan PC kapasitas 250 GB tahun 2009 yang hanya sebesar *notebook*, kotak kecil berukuran A4 dengan ketebalan 2 cm. Dengan kondisi CPU terakhir, jawaban atas permasalahan model getaran dalam skala besar seperti pada gedung bertingkat, stadion, pesawat terbang, kapal, dapat diperoleh hanya dengan menggunakan *notebook* tersebut. Tentu saja solusi model getaran dengan idealisasi elemen yang sangat banyak membutuhkan piranti lunak sebagai aplikasi ilmu pengetahuan. Peranti lunak tersebut antara lain SAP dan MATLAB. Pada bab terakhir buku ini disampaikan aplikasi idealisasi getaran dengan MATLAB.

## 1.2 Konsep Dasar Getaran Mekanis

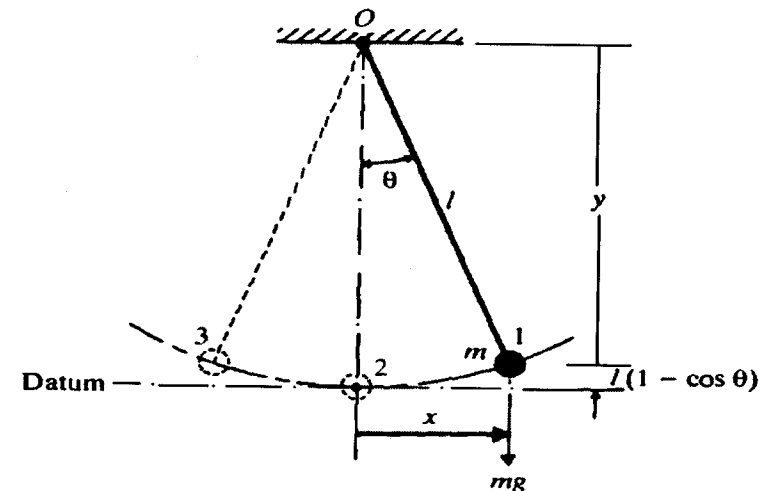
Getaran adalah gerakan berisolasi dari sistem mekanis serta kondisi-kondisi dinamisnya. Gerakan dapat berupa benturan yang berulang secara kontinyu atau dengan kata lain dapat juga berupa gerakan tidak beraturan atau acak. Getaran sebagai fenomena alam merupakan kecenderungan respons alam atau respons yang terjadi, baik langsung maupun tidak langsung, akibat terjadinya peristiwa alam. Peristiwa alam ini menampakkan sesuatu yang dapat kita pelajari rentetannya. Penampakan ini dapat merupakan sesuatu yang dirasakan maupun yang tidak dirasakan oleh panca indera. Ranah pengetahuan tertarik terhadap lingkup fenomena yang tidak dapat dirasakan panca indera, seperti panas dan getaran. Getaran merupakan salah satu fenomena alam. Itu berarti kita buat kelompok kejadian dari respons penampakan dalam domain yang kita sebut getaran. Gempa merupakan anggota kelompok getaran dan gerakan pegas daun sebagai penghubung roda dengan sasis mobil merupakan getaran.

Contoh penjelasan teknis untuk fenomena getaran mesin terhadap fondasi adalah sebagai berikut: Getaran mesin disebabkan oleh adanya variasi oleh sistem penggerak menjadi gaya yang memiliki resultan tidak sama dengan nol atau resultan gaya dengan harga berubah-ubah. Kalau semua gaya tersebut mempunyai harga dan arah yang dapat dihitung secara tepat dan akurat maka keseimbangan mesin tersebut akan terjadi sehingga mesin tidak menimbulkan getaran. Kenyataannya, gaya di dalam sebuah

mesin selalu berubah, baik harga maupun arahnya, belum lagi ditambah gaya luar sebagai gangguan misalnya dari efek inersia. Keseimbangan tidak mungkin dicapai meskipun sudah dilakukan perhitungan mendetail. Masalah penyeimbang gaya yang berubah-ubah ini, ditambah gerakan bolak-balik dari elemen-elemen mesin pada bagian tertentu, menyebabkan setiap gerakan mesin selalu menimbulkan getaran. Rekayasa getaran sebagai jawaban atas permasalahan sampai saat ini, bertujuan untuk meminimasi efek kerusakan akibat adanya getaran tersebut. **Getaran mesin juga dapat terjadi antara lain oleh gaya putar atau torsi yang tidak seimbang**, dalam artian gaya tersebut tidak mempunyai harga tetap; perubahan tekanan gas dalam torak, dan perubahan gaya kelembaman atau momen lentur dalam setiap gerakan benda. Kalau gaya yang berubah-ubah dalam mesin ini terjadi pada kecepatan yang sama dengan getaran frekuensi pribadi dari struktur atau konstruksi keseluruhan mesin maka resonansi akan terjadi. Resonansi akan menyebabkan amplitudo getaran menjadi naik secara teoritis dengan ideal frekuensi hingga mencapai tak berhingga. Secara riil, apabila mesin tidak didukung sistem peredaman yang cukup maka struktur pendukung mesin yang bergetar tersebut akan rusak.

Gerakan yang menyebabkan getaran ini merupakan fenomena alam tidak langsung. Fenomena alam tidak langsung ini tidak dapat dihilangkan sebagaimana halnya noise dan gangguan. Namun demikian getaran ini dapat dikurangi dari pengaturan dampak pada penampakan frekuensi dan amplitudo. **Frekuensi getaran secara fisik apabila tidak terkendali dapat menimbulkan kondisi bising pada saat pengoperasian mesin, sedangkan amplitudo getaran tak terkendali tampak lewat goyangan mesin yang tak beraturan.** Untuk mengurangi akibat merugikan dari dua parameter ini, agar tidak merusak struktur yang bergetar, selain dilakukan dengan analisis, data percobaan, dan tinjauan teori. Analisis dibantu dengan komputasi PC sebagai pendukung.

Umumnya getaran timbul akibat adanya gaya yang bervariasi dengan waktu. Contohnya, ayunan sebuah pendulum yang dikaitkan dengan sebuah kawat seperti pada Gambar 1.1. Secara umum sebuah sistem bergetar, menyimpan energi potensial (pegas dan bahan elastis), dan energi kinetik (oleh massa atau inersia sebagai idealisasi sifat pegas), ataupun penyerap energi dan melepaskannya secara perlahan (seperti idealisasi sebagai damper).



Gambar 1.1 Getaran sederhana dari ayunan pendulum

Sebagai contoh adalah getaran dari pendulum pada Gambar 1.1. Jika suatu massa  $m$  dilepas setelah disimpangkan membentuk sudut ' $\theta$ ' pada posisi-1, energi kinetiknya adalah nol. Namun pada posisi ini energi potensialnya sebesar ' $mgl(1 - \cos \theta)$ ', karena gaya gravitasi ' $mg$ ' akan memberikan torsi sebesar  $mgl \sin \theta$  di titik O. Benda tersebut akan mulai berayun ke kiri dari posisi-1. Hal ini akan memberikan percepatan angular searah jarum jam. Ketika mencapai posisi-2, semua energi potensial benda dikonversi menjadi energi kinetik. Ayunan benda kemudian berlanjut ke posisi-3, namun torsi yang berlawanan dengan arah jarum mulai bereaksi akibat gaya resultan sebagai gaya radial. Hal ini menyebabkan terjadinya perlambatan pada benda. Kecepatan benda berkurang hingga menjadi nol pada posisi-3. Pada posisi ini semua energi kinetik benda dikonversi menjadi energi potensial. Akibat adanya torsi dari resultan gravitasi dan tegangan tali, dan meskipun pada posisi-2 tidak ada gaya resultan radial, benda melanjutkan ayunannya dengan arah berlawanan jarum jam, dengan percepatan secara angular dan melewati titik-2.

Proses ini terus berulang dan pendulum akan memiliki gerakan osilasi. Namun secara praktis besar sudut osilasi ' $\theta$ ' secara perlahan berkurang dan pendulum akhirnya berhenti akibat adanya redaman yang dihasilkan oleh udara. Artinya ada sebagian energi yang hilang setiap siklus yang disebabkan oleh adanya redaman udara. Konsep dasar *perpindahan energi* adalah energi itu tidak dapat hilang, melainkan berpindah. Jika bumi dan atmosfer menjadi

andalan *tempat perpindahan energi akhir* karena penyerapan dari benda, maka wajar bila '*Bumi Makin Panas*'.

Frekuensi dan simpangan merupakan contoh parameter getar untuk perancangan mesin dan struktur rekayasa perlu mempertimbangkan sifat getaran yang terjadi dan sejauh mana dapat merusak bagian yang lain. Bagian ini disebut sistem. Getaran secara sistem atau bagian dari sistem yang berosilasi dapat terjadi sebagai *gerakan linear miring* atau gerakan non-linear (bedakan dengan istilah getaran non-linear yang sudah dibahas sebelumnya). Untuk sistem gerakan linear berlaku prinsip superposisi dengan penggunaan model matematika yang sesuai atau mengikuti asumsi teoretiknya. Hal ini dapat menjadi dasar analisis dari perhitungan teori sistem yang lebih rumit. Sebaliknya, apabila teknik untuk menganalisis sistem gerakan kurang dikenal atau tidak sesuai kondisi riil saat digunakan, maka hasil analisis perlu dipertimbangkan. Analisis gerakan linear dalam getaran hanya populer dalam upaya mendapatkan prediksi teori seperti dibahas dalam buku ini. Hal ini merupakan salah satu alasan mengapa *Engineering Vibration* menjadi kurang populer. *Semua sistem riil* dari fenomena getaran derung mempunyai gerakan non-linear, yang berarti amplitudo osilasi cenderung berubah tidak beraturan.

Parameter getaran, misalnya *frekuensi*, dijelaskan sebagai jumlah getaran yang terjadi dalam kurun waktu 1 detik. Rumus frekuensi tentu saja merupakan '*n-getaran per-1 detik*' atau dengan satuan '**Hz**'. Frekuensi dapat juga dinyatakan dengan satuan radian per detik (rad/s) dan disimbolkan dengan omega ( $\omega$ ). Hubungan antara omega dan frekuensi adalah ' $\omega = 2\pi f$ '. Parameter lainnya adalah *periode*. Periode dinyatakan sebagai waktu yang diperlukan untuk melakukan satu kali getaran. Dengan demikian rumus periode adalah satu dibagi frekuensi, atau ' $T = 1/f$ '. Periode umum dihubungkan dengan harmonik, karena harmonik merupakan suatu gerakan dengan periode yang tetap selamanya. Harmonik berarti keselarasan, seperti perputaran siang dan malam secara teratur dalam periode 24 jam. Harmonik juga terjadi pada ayunan jam dan detak jantung.

Getaran dapat pula terjadi akibat perubahan suhu atau temperatur. Perubahan temperatur berhubungan dengan perubahan panjang atau pendek material konduktor. Analogi getaran (perhitungan dengan cara getaran yang dapat diaplikasikan pada kejadian selain getaran), adalah perubahan sudut tekan pertemuan roda gigi, dan perubahan kecepatan yang menyebabkan gerakan membran pada telinga atau pada alat kedokteran. Idealisasi getaran

mekanik dengan gerakan atau simpangan sebagai fungsi sinusoidal atau dengan ' $y = A \sin \omega t$ ' dapat dianalogikan dengan rangkaian elektronika sebagai ' $V = R I \sin \omega t$ ' dengan ( $V$  = voltage,  $R$  = Tahanan, dan  $I$  = arus).

Secara umum, gerak getaran merupakan suatu fungsi periodik di mana fungsi periodik tersebut dapat dinyatakan dengan persamaan 1.1. Waktu  $t$  dan periode  $T$  dengan percepatan sudut dalam rpm (rotasi per menit) memberikan hubungan Fungsi Harmonik, persamaan 1.2. Jika fungsi harmonik dinyatakan dengan simpangan atau  $x(t)$  maka Fungsi Kecepatan merupakan turunan pertama dari fungsi simpangan sebagai fungsi waktu, sesuai persamaan 1.3.

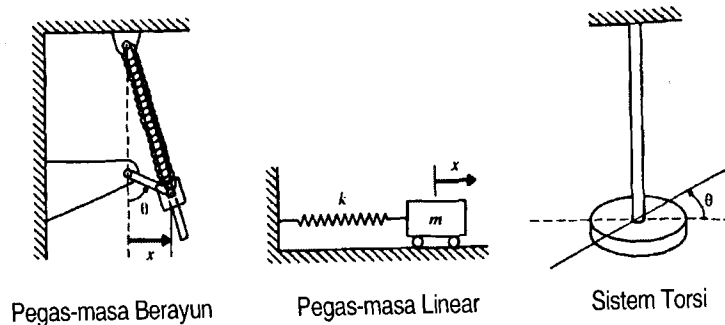
$$\text{Fungsi Periodik, } x(t) = x(t + T) \quad (1.1)$$

$$\text{Fungsi Harmonik Sederhana, } x(t) = A \sin \omega t \quad (1.2)$$

$$\text{Fungsi Kecepatan, } v(t) = dx/dt = A \omega \cos \omega t \quad (1.3)$$

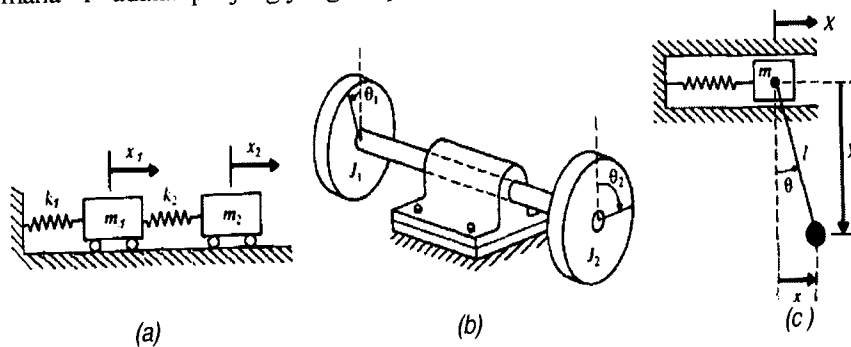
Jumlah minimum koordinat bebas yang dibutuhkan untuk menentukan gerakan semua benda dan berhubungan sebagai bagian dari sistem pada waktu tertentu, didefinisikan sebagai *Derajat Kebebasan Sistem* atau Degree of Freedom. Sistem sederhana pada pendulum Gambar 1.1, dan untuk contoh pada Gambar 1.2, mewakili *Single Degree of Freedom*, disingkat SDOF, atau sistem satu derajat kebebasan. Pada sistem pendulum sederhana Gambar 1.1, koordinat dapat ditentukan baik menggunakan koordinat kartesian dengan ' $x$  dan  $y$ ' maupun koordinat polar dengan ' $\theta$ '.

Jika koordinat kartesian ' $x$  dan  $y$ ' dipergunakan untuk menggambarkan gerakan pendulum, maka koordinat-koordinat itu ( $x$  dan  $y$ ) tidak saling bebas (sesuai kemampuan gerakan dengan DOF=1). Koordinat ' $x$  dan  $y$ ' tersebut dihubungkan dengan persamaan  $x^2 + y^2 = l^2$ , dengan ' $l$ ' adalah panjang pendulum yang tetap. Ada satu lagi koordinat yang dapat menggambarkan gerakan pendulum, yang dalam contoh ini kita temukan bahwa penggunaan koordinat polar sebagai koordinat bebas sistem pendulum sederhana lebih tepat daripada koordinat kartesian. Untuk kasus slider Gambar 1.2 (a), baik koordinat polar ' $\theta$ ' maupun koordinat kartesian ' $x$ ' dapat digunakan untuk menggambarkan gerakan slider. Pernyataan penggunaan koordinat kartesian ' $x$ ' berhubungan dengan harga ' $\theta$ ' sebagai ' $x = R \sin \theta$ ', dengan ' $R$ ' panjang penyangga screw. Untuk Gambar 1.2 (b), koordinat kartesian sebagai hanya arah sumbu ' $x$ ' dapat digunakan untuk menggambarkan gerakan benda. Sedangkan untuk sistem torsional Gambar 1.2 (c), koordinat polar ' $\theta$ ' lebih tepat digunakan untuk menggambarkan gerakan benda.



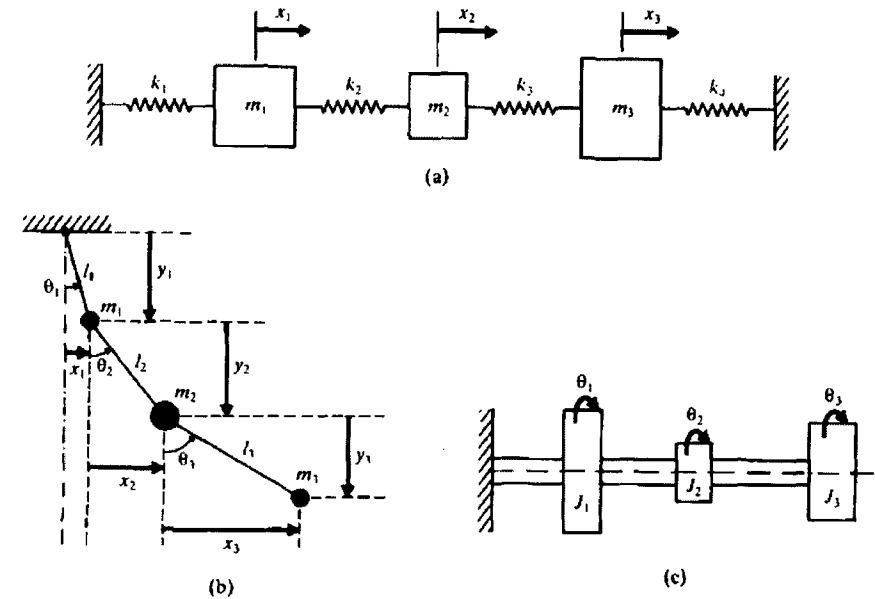
**Gambar 1.2** Contoh Idealisasi getaran SDOF

Contoh untuk *double degree of freedom* (disingkat MDOF), dapat dilihat pada Gambar 1.3. Uraian tiga gambar ini sebagai berikut, Gambar 1.3 (a) diperlihatkan sistem dua massa dengan dua pegas yang menggambarkan dua koordinat linier  $x_1$  dan  $x_2$ , Gambar 1.3 (b) menunjukkan dua sistem rotor di mana gerakan dapat ditentukan dalam koordinat polar ' $\theta_1$  dan  $\theta_2$ '. Sedangkan gerakan dalam Gambar 1.3 (c) dapat diwakili baik dengan koordinat ' $(x,y)$ ', atau  $X(x,y,\theta)$ '. Huruf kecil ' $x$  dan  $y$ ' dibatasi oleh persamaan ' $x^2 + y^2 = l^2$ ', di mana ' $l$ ' adalah panjang yang tetap.



**Gambar 1.3** Contoh sistem dengan 2 derajat kebebasan

Contoh untuk tiga derajat kebebasan dapat dilihat pada Gambar 1.4, di mana pada Gambar 1.4(a), 1.4(b), dan 1.4(c), tiga koordinat tersebut adalah koordinat linier ' $x_i$  ( $i=1,2,3$ )' dan ' $\theta_i$  ( $i=1,2,3$ )' dapat digunakan untuk menggambarkan gerakan sistem. Sedangkan Gambar 1.5(b), dengan ' $\theta_i$  ( $i=1,2,3$ )' menunjukkan posisi dari massa ' $m_i$  ( $i=1,2,3$ )'. Khusus untuk Gambar 1.4(b) menggunakan koordinat kartesian ' $(x_i, y_i)$ ' dengan ' $(i=1,2,3)$ ', dibatasi oleh persamaan ' $x_i^2 + y_i^2 = l_i^2$ ' dan ' $(i=1,2,3)$ '.



**Gambar 1.4** Contoh sistem dengan 3 derajat kebebasan

Secara praktis banyak sistem dapat digambarkan oleh derajat kebebasan tertentu seperti yang terlihat pada Gambar 1.2 sampai Gambar 1.4. Namun ada beberapa kasus, seperti batang cantilever, lihat Gambar 1.5, yang memiliki derajat kebebasan tak terhingga. Jumlah koordinat dapat didefinisikan menjadi tak hingga atau banyak sekali agar kurva defleksi lebih halus, sebagai kurva defleksi. Pemahaman mekanika menyebutkan bahwa sistem dengan derajat kebebasan tertentu disebut sebagai *sistem diskrit* dan sistem dengan derajat kebebasan tak terhingga disebut sebagai *sistem kontinu*. Sistem kontinu benda riil dapat didekati sebagai sistem diskrit dan solusi yang diperoleh dalam bentuk paling sederhana, atau dengan jumlah asumsi nodal yang proporsional.

Persamaan getaran dibuat sebagai persamaan diferensial dalam bentuk matriks untuk model lebih dari satu DOF. Hal ini memungkinkan diskritisasi model dari sistem dengan DOF dibuat menjadi tak berhingga agar pendekatan solusi dapat diperoleh. Persamaan getaran dalam bentuk umum atau bentuk matriks dinyatakan sebagai berikut:

$$[m] \ddot{x}(t) + [c] \dot{x}(t) + [k] x(t) = f(t)$$



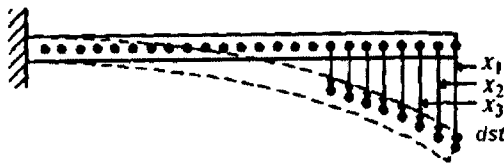
Matriks bujur sangkar '[m]', '[c]' dan '[k]' adalah matriks massa, matriks damping, dan matriks kekakuan. Contoh koefisien matriks untuk 2-DOF masing-masing sebagai berikut:

$$[m] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}$$

$$[c] = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 + c_3 \end{bmatrix}$$

$$[k] = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix}$$

Detail pembahasan yang menghasilkan koefisien-koefisien dalam matriks persamaan diatas untuk 2-DOF, dicantumkan dalam Bab V pada persamaan 5.3(a) sampai 5.3(c).



Gambar 1.5 Contoh Batang DOF tak terhingga

Sebuah sistem sebagai sistem kontinu memberikan solusi eksak, metode analisis yang tersedia untuk sistem kontinu ini terbatas pada permasalahan sempit dan terpilih, seperti batang yang uniform, silinder rod, dan plat tipis, sehingga praktis sistem kontinu ini diperlakukan sebagai sistem diskrit. Secara umum keakuratan solusi diperoleh dengan menambah asumsi parameter getaran dengan, jumlah massa, pegas, dan peredam. Dengan kata lain, dilakukan dengan menambah jumlah derajat kebebasan. Setiap penambahan jumlah elemen dalam model getaran atau model pada umum-nya, akan memberikan hasil perhitungan (misalnya harga simpangan atau harga gaya-momen batang) menjadi lebih akurat, dalam artian lebih mendekati harga eksak. Hal ini didukung dengan trend atau kecenderungan akurasi hasil yang bersifat konvergen yaitu, makin banyak jumlah elemen model ditambahkan, model makin akurat. Tetapi penambahan jumlah elemen selanjutnya dapat sia-sia atau mubasir karena memberikan tambahan akurasi menjadi tidak signifikan.

Sebuah sistem yang mengalami getaran dengan kondisi batang kontinu ditumpu secara sederhana pada satu sisi sebagai tumpuan jepit. Derajat kebebasan batang tersebut dapat kita idealisasikan sama dengan 2 atau 3 sampai dengan derajat kebebasan tak berhingga. Dalam hal ini sistem kontinu diberlakukan sebagai sistem diskrit, sehingga untuk solusi model diasumsikan dengan DOF tertentu. Ketelitian jawab permasalahan riil dari kontinu menjadi diskrit ditentukan sesuai asumsi derajat kebebasan. Sistem ini disebut tinjauan getaran dari benda *continuous mass*. Sistem derajat kebebasan yang kita bahas sebelumnya dari sistem derajat kebebasan satu sampai tiga, sesuai Gambar 1.4, menunjukkan bahwa benda dinyatakan sebagai satu masa (tidak tergantung dari seberapa besar atau kecil benda tersebut). Asumsi benda yang terkoneksi sebagai sambungan jenis ini disebut *lump mass*.

### 1.3 Pembebanan dan Klasifikasi Getaran

Hasil dari proses manufaktur maupun analisis teoritik engineering menyatakan bahwa, produk prototipe mengalami pembebanan riil setiap waktu pada berbagai kondisi lingkungan produk tersebut. Atau dapat dikatakan bahwa setiap produk mempunyai sejarah pembebanan riil yang diterima dari awal produk dioperasikan sampai rusak atau jangka waktu tertentu. Semakin bervariasi yang dialami dari pengoperasian produk, semakin acak beban yang diterima produk dan semakin banyak jumlah tinjauan analisis produk yang digunakan, maka semakin kompleks bentuk penggunaan beban riil produk di lapangan, juga pembebanan terutama untuk kepentingan desain dapat diperoleh dengan menggunakan asumsi. Asumsi ini umumnya diperlukan untuk desain produk baru dan jarang untuk modifikasi. Modifikasi produk umumnya berdasarkan beban baru riil yang diperoleh dari uji produk di lapangan dengan menggunakan produk baru atau prototip tersebut. Pendataan jenis beban dari analisis produk dalam kelompok Sejarah Pembebanan mulai dilakukan tahun 1980. Hal ini sejalan dengan berapa banyak analisis disyaratkan (sesuai kesepakatan dalam regulasi) pada produk. Untuk menyatakan perbedaan syarat analisis, kurva harga beban terhadap frekuensi yang disebut sejarah pembebanan dibuat. Setidak-tidaknya pada tahun 1980, sudah dibuat aktuator yang dapat mencatat gaya dan frekuensi pada lokasi tertentu dari monitoring harga strain pada strain gauge yang dipasang di elemen di mana beban dicatat. Kondisi lapangan diupayakan pada kondisi riil beban dan pada kondisi pengoperasian laboratorium.



Sejarah pembebanan merupakan gabungan dari beberapa rujukan jenis beban, dan jenis beban ini umumnya muncul dari perkembangan analisis penerapan beban pada produk yang bersangkutan. Kita tahu bahwa penerapan beban paling sederhana dan paling awal muncul adalah jenis *beban statik*, demikian selanjutnya berkembang, kemudian ada beban getaran, beban fatik. Regulasi terakhir adalah analisis beban sebagai regulasi yang muncul setelah tahun 1995, yaitu *beban kejut (impact)*. Analisis kekuatan terhadap beban kejut akhir-akhir ini populer dilakukan terutama untuk pertimbangan *keamanan dan kenyamanan*, misalnya keamanan pengendara mobil terhadap kecelakaan yang berupa benturan. Aspek kekuatan, sebagai analisis produk terhadap beban statik, dinyatakan dengan rasio dari satuan turunan, yaitu tegangan. Sementara tegangan merupakan satuan gaya per luasan (misalnya,  $\text{N/mm}^2$ ). Produk dikatakan layak atau kuat apabila mempunyai *faktor keamanan* yang bernilai positif. Faktor keamanan merupakan rasio atau perbandingan antara tegangan akibat beban yang diterima oleh produk dibandingkan dengan tegangan dari kemampuan material yang identik dengan kemampuan produk menerima beban. Dalam banyak aplikasi, umumnya harga tegangan dari bahan, masih harus dikalikan dengan *Faktor Koreksi* (yang umumnya berharga lebih besar dari satu). Faktor koreksi tersebut antara lain pertimbangan dari beban, antara lain getaran, fatik, impact.

**Tabel 1.1** Jumlah beban sesuai analisis kekuatan

| No. | Jenis Beban           | Frekuensi Kejadian     | Periode Beban                              |
|-----|-----------------------|------------------------|--------------------------------------------|
| 1   | <b>Statik</b>         | Sekali seumur hidup    | $t_1$                                      |
| 2   | <b>Korosi</b>         | 2-3x seumur hidup      | $t_2$                                      |
| 3   | <b>Fatik</b>          | Sering                 | $t_3 / 0.1 \text{ sd. } 1000 \text{ Hz}$   |
| 4   | <b>Flutter</b>        | Sering                 | $t_4 / < 500 \text{ Hz}$                   |
| 5   | <b>Sistem getaran</b> | Sering                 | $t_5 / 5000 \text{ sd. } 50000 \text{ Hz}$ |
| 6   | <b>Trans. Getaran</b> | Sering                 | $t_6 / < 5000 \text{ Hz}$                  |
| 7   | <b>Dinamik</b>        | Sering                 | $t_7$                                      |
| 8   | <b>Impact</b>         | $< 10x$ seumur hidup   | $t_8$                                      |
| 9   | <b>Gempa</b>          | Min. $1x$ seumur hidup | $t_9$                                      |

**Tabel 1.1** menyatakan jenis beban dengan karakteristik analisis kekuatan dari pembagian frekuensi dan periode kejadian beban. Beban korosi sebagai contoh, merupakan beban yang menyebabkan daerah tertentu dari produk dalam kondisi plastis pada pembebanan periode tertentu, kemudian kembali menerima beban normal. Analisis kekuatan produk yang dimaksud di sini adalah akibat pembebanan, bukan yang lain. Material dalam kondisi plastis

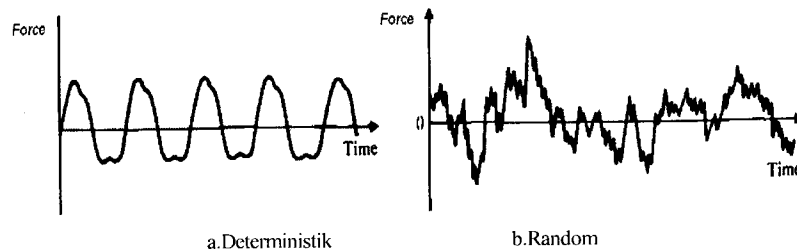
berarti sudah mempunyai retak rambut atau muncul pori-pori dan jika produk bekerja dengan gaya garis hubung momen luar atau dalam suasana diselimiuti fluida korosif, maka akan menimbulkan korosi. Percepatan korosi yang terjadi pada produk dapat diprediksi dari pertambahan volume daerah plastis yang notabene merupakan daerah korosi. Kondisi ini disebut beban mencapai kondisi plastis material. Kondisi statik produk berarti kondisi di mana produk menerima beban paling maksimal dan paling besar baik keadaan tarik atau *Tension* maupun keadaan tekan atau *Compression*, dan minimal hanya sekali dikenakan atau terjadi pada produk dalam sejarah pembebanan.

Sampai saat ini beban getaran memberi efek pada produk dengan 2 analisis kekuatan sesuai jenis beban getaran tersebut, yaitu beban dari sistem getaran akibat efek getaran dari luar, dan beban dari transien getaran akibat efek getaran beban dari gangguan.

Getaran dibagi menjadi beberapa klasifikasi, antara lain:

1. **Getaran bebas** didefinisikan sebagai getaran yang terjadi pada suatu sistem (mekanisme) tanpa adanya pengaruh gaya luar (eksitasi) yang memengaruhinya. Dengan kata lain, eksitasi diberikan pada awal saja, setelah itu benda akan berosilasi. Contohnya adalah gerakan pendulum pada Gambar 1.1.
2. **Getaran paksa** dapat didefinisikan sebagai getaran yang terjadi pada suatu sistem karena adanya rangsangan gaya luar (eksitasi). Sebagai contoh adalah getaran pada motor diesel. Jika rangsangan tersebut ber-osilasi maka sistem dipaksa untuk bergetar pada frekuensi rangsangan. Jika frekuensi rangsangan sama dengan salah satu frekuensi natural sistem maka akan didapat keadaan resonansi, dan osilasi besar dapat menimbulkan bahaya. Kerusakan struktur yang terjadi pada gedung, jembatan, turbin, dan sayap pesawat berhubungan dengan fenomena resonansi ini.
3. **Getaran tak teredam** adalah getaran di mana tidak ada kehilangan energi yang disebabkan tahanan selama osilasi.
4. **Getaran teredam** adalah getaran di mana terjadi kehilangan energi yang disebabkan tahanan selama osilasi.
5. **Getaran linier** adalah semua komponen sistem yang bergetar, baik itu pegas, massa, dan peredam berperilaku linier. Pada kondisi ini prinsip superposisi dipegang dan analisis teoritis menggunakan model matematika sangat baik untuk dikembangkan. Buku ini melakukan analisis getaran secara linear.

6. **Getaran non-linier** adalah semua komponen sistem yang bergetar baik itu pegas, massa, dan peredam berperilaku non linier. Pada kondisi ini penerapan prinsip superposisi tidak valid dan analisis menggunakan model matematika kurang baik untuk dikembangkan. Perhitungan numerik dengan pendekatan metode non-linear dari hasil regresi kelakuan material suatu percobaan dilakukan. Contoh pendekatan ini umum dilakukan untuk getaran impak.
7. **Getaran deterministik** adalah getaran di mana harga eksitasi yang bekerja pada sistem diketahui setiap saat. Eksitasi diplot kemudian perhitungan numerik ekuivalen eksitasi pada model dilakukan.
8. **Getaran random** atau getaran acak adalah getaran di mana harga eksitasi yang bekerja pada sistem tidak dapat diperkirakan. Untuk jenis getaran ini diperlukan rekaman data eksitasi dari pendekatan atau simulasi yang benar untuk dibuatkan polanya secara statistik sehingga rata-rata eksitasinya dapat diperkirakan. Contoh getaran ini adalah gempa bumi, kekasaran permukaan jalan, kecepatan angin.



Gambar 1.6 Contoh eksitasi deterministik dan random

## 1.4 Prosedur Analisis Getaran

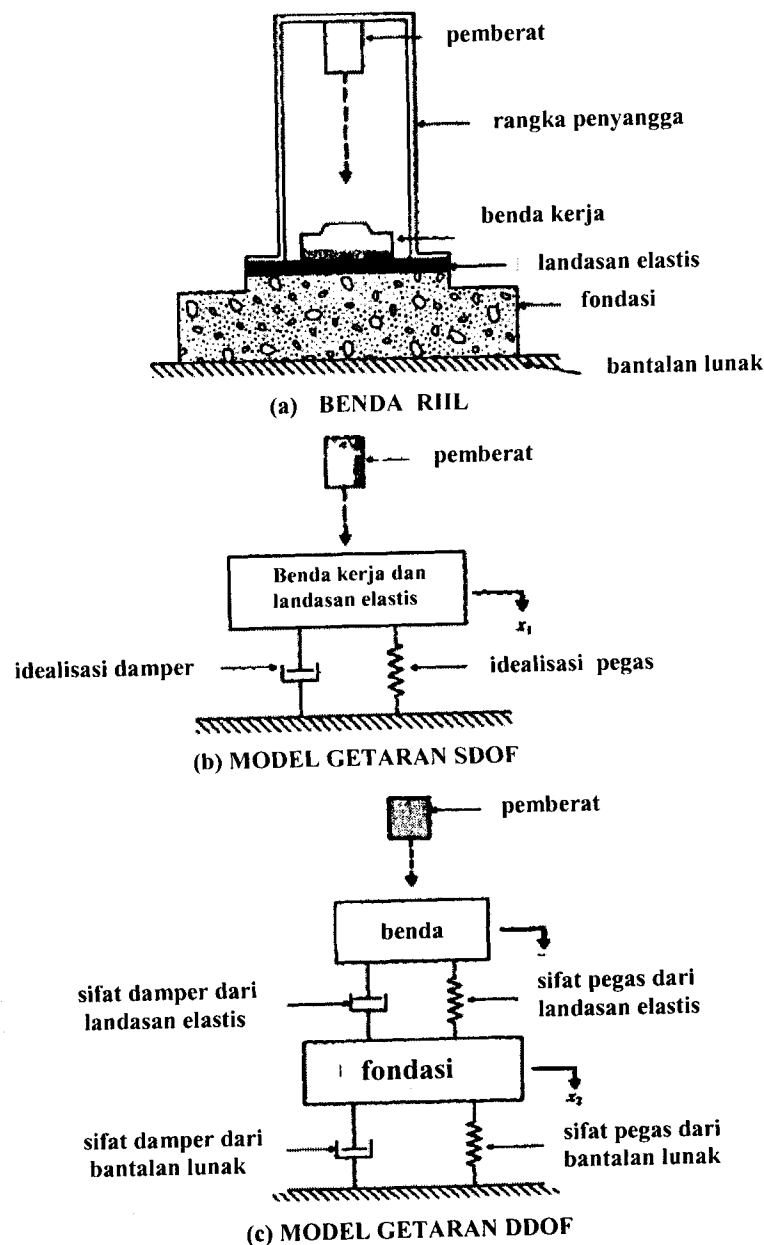
Salah satu contoh suatu sistem bergetar adalah sistem dinamika, dan variabel seperti eksitasi (input) akan memberikan respons (output) sebagai fungsi dari waktu. Respons suatu sistem getaran dinyatakan dengan kondisi awal, yaitu suatu pasangan harga antara respons (misalnya simpangan) pada jumlah derajat kebebasan sesuai idealisasi dari model getaran yang dibuat. Analisis dari sistem getaran biasanya melibatkan model matematika, turunan dari persamaan yang dibangun, solusi dari persamaan, dan interpretasi hasil, yang dijabarkan sebagai berikut:

### Langkah 1: Membuat Model Matematika

Model matematika merupakan representasi dari kondisi riil realisasi operasional sebuah sistem dan tujuan pembuatan model matematika ini adalah untuk mencari solusi dari analisis perilaku sistem. Model matematika haruslah mampu menggambarkan sistem cukup detail, namun tidak membuatnya terlalu kompleks. Model matematika bisa linier maupun non-linier, tergantung perilaku komponen sistem getaran. Kadang-kadang model matematika dibuat secara perlahan untuk memperoleh hasil yang akurat. Pada pendekatan ini model dasar yang digunakan secara tepat dapat menggambarkan perilaku sistem secara keseluruhan. Selanjutnya model matematika diperbaiki dengan mengamati komponen atau perilaku sistem secara lebih detail.

Untuk mengilustrasikan prosedur perbaikan yang digunakan dalam membangun model matematika, perhatikan forging hammer pada Gambar 1.7. Forging hammer terdiri dari rangka, pemberat yang dikenal sebagai *tup*, *anvil*, dan fondasi. Anvil adalah komponen yang terbuat dari baja pejal tempat di mana material yang hendak diforging ke bentuk sesuai keinginan dengan ditumbuk oleh *tup* secara berulang. Umumnya anvil dipasang pada dudukan elastis untuk mengurangi transmisi getaran ke rangka dan fondasi. Pada pendekatan pertama, rangka, anvil, dudukan elastis, fondasi, dan tanah dimodelkan sebagai satu derajat kebebasan seperti diperlihatkan Gambar 1.7(b). Untuk perbaikan pendekatan, berat dari rangka, anvil, dan fondasi dipisah menjadi model dua derajat kebebasan seperti diperlihatkan Gambar 1.7(c). Model getaran ini dapat dikembangkan dengan memperhatikan dan mempertimbangkan tumbukan dari *tup*.

Ilustrasi untuk prosedur perbaikan yang digunakan dalam membuat model matematika, dapat diperhatikan dari mesin forging hammer Gambar 1.7. Forging hammer terdiri dari rangka, pemberat yang dikenal sebagai *tup*, benda kerja atau *anvil*, dan dudukan atau *fondasi*. Anvil merupakan komponen yang terbuat dari baja pejal tempat material hendak diforging menjadi bentuk sesuai keinginan dengan ditumbuk (impact) oleh pemberat atau *tup* secara berulang-ulang. Umumnya anvil dipasang pada dudukan atau fondasi elastis untuk mengurangi transmisi getaran ke rangka dan fondasi. Pada pendekatan pertama, rangka, anvil, dudukan elastis, fondasi, dan tanah atau bantalan lunak, pada lokasi dibawah fondasi, dimodelkan dengan satu derajat



Gambar 1.7 Model Forging Hammer

kebebasan atau SDOF, seperti diperlihatkan Gambar 1.7(b). Untuk perbaikan pendekatan, berat dari rangka, anvil, dan fondasi dipisah menjadi model dua derajat kebebasan seperti diperlihatkan Gambar 1.7(c). Model getaran ini dapat dikembangkan dengan memperhatikan dan mempertimbangkan tumbukan dari tup. Beban model matematika SDOF dibuat dan dievaluasi untuk pilihan terbaik.

### Langkah 2: Menurunkan Persamaan Matematika Getaran

Sekali model matematika tersedia, kita gunakan prinsip dinamika untuk persamaan turunan yang menggambarkan sistem getaran. Umumnya persamaan matematika ini dalam bentuk *ordinary differential equation* (ODE) untuk sistem diskrit dan *partial differential equation* (PDE) untuk sistem kontinu. Persamaan matematika dapat dalam bentuk linier ataupun non-linier, tergantung perilaku komponen sistem getaran. Beberapa pendekatan umum digunakan untuk menurunkan persamaan matematika. Pembahasan dalam buku ini, di antaranya adalah Hukum ke-2 Newton tentang gerakan, prinsip d'Alembert, dan prinsip konservasi energi, dinyatakan pada Bab III.

### Langkah 3: Membuat Prosedur Persamaan Matematika Getaran

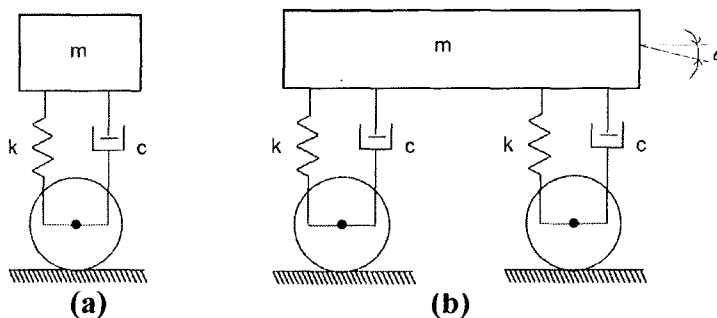
Persamaan gerakan harus dicari solusi untuk mendapatkan respons dari sistem getaran. Prosedur solusi ini dinyatakan dalam metode yang dipilih tergantung kondisi getaran riil. Kita dapat menggunakan salah satu teknik berikut untuk menemukan solusi, yaitu metode standar untuk mendapatkan persamaan turunan, misalnya dengan memilih, metode transformasi Laplace, atau metode matriks, atau metode numerik. Jika persamaan matematika yang terbentuk adalah non-linier, umumnya solusi menggunakan bentuk tertutup. Lebih jauh, umumnya solusi untuk pemecahan persamaan matematika PDE perlu lebih rinci dideskripsikan daripada ODE sehingga metode numerik dengan bantuan komputer digunakan untuk solusi persamaan matematika PDE. Namun demikian sangatlah sulit menarik kesimpulan umum dari perilaku sistem dengan menggunakan hasil komputer. Salah satu alasan dengan penggunaan komputer adalah *jaminan* fungsi respon yang diperoleh dapat dicari dari *harga respon sebagai fungsi* terhadap waktu dengan *regresi*. Kelemahan penggunaan komputer yang sampai sekarang menjadi kajian menarik adalah: a. kurang tepat dalam memilih asumsi fungsi untuk regresi dari harga 'respon fungsi waktu', b. pemilihan selang waktu perhitungan, dan c. kondisi awal.

#### Langkah 4: Interpretasi Hasil.

Tiga kelemahan dari solusi penerapan persamaan matematika dengan bantuan komputer ini menjadi menarik bagi peneliti karena ketiganya berhubungan dengan ketepatan pemberian harga atau persamaan matematik yang mempertimbangkan kondisi riil getaran. Interpretasi kondisi riil getaran harus dilakukan dengan dengan baik, misalnya interpretasi terhadap *displacement*, kecepatan, dan akselerasi dari berbagai sistem riil. Hasil ini harus diinterpretasikan dengan jelas untuk keperluan analisis dan kemungkinan implikasi terhadap hasil rancangan. Hasil prosedur *Langkah-4* digunakan untuk mengurangi kelemahan penggunaan komputer pada *Langkah-3*, untuk kebutuhan desain, dan pembuatan produk selanjutnya.

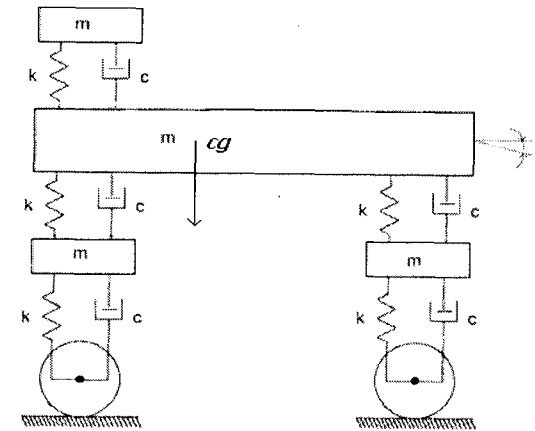
### 1.5 Model Getaran Sesuai Kebutuhan

Idealisasi suatu permasalahan getaran adalah langkah awal untuk menganalisis permasalahan tersebut. Idealisasi tergantung dari kepentingan yang dianalisis, apakah satu, dua, atau banyak derajat kebebasan. Sebagai contoh adalah mobil. Jika kita ingin melihat karekteristik suspensi mobil terhadap permukaan jalan maka tinjauan teoretik pegas-damper diidealisasikan sebagai sebuah konsentrasi masa (untuk body), yang ditumpu dengan pasangan pegas dan damper (sebagai lokasi pegas dan shock atau hidrolik kendaraan), dan diteruskan sebagai hubungan seri dengan ban. Idealisasi yang tepat untuk kasus ini adalah model satu derajat kebebasan, seperti yang terlihat pada Gambar 1.8(a). Sedangkan jika ingin melihat pengaruh goyangan arah anggukan dari body maka idealisasi yang tepat adalah sistem dengan dua derajat kebebasan seperti Gambar 18(b).

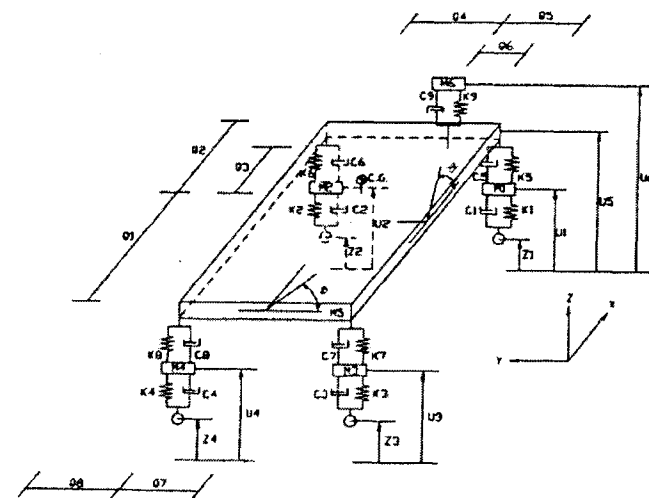


Gambar 1.8 Idealisasi model sistem suspensi mobil

Untuk kasus dengan mempertimbangkan kenyamanan sopir maka idealisasi yang tepat adalah model massa-pegas-redaman dengan banyak derajat kebebasan seperti Gambar 1.9. Untuk kasus ini orang sebagai massa dihubungkan seri sebagai spring-damper dengan jok. Kemudian keduanya dihubungkan seri dengan body (mobil atau chasis) sebagai massa. Keduanya dihubungkan seri dengan suspensi sebagai idealisasi dari pegas-redaman.



Gambar 1.9 Idealisasi model sistem kenyamanan sopir 2D



Gambar 1.10 Idealisasi sistem pegas-damper mobil 3D

Hasil akhir ini dihubungkan seri dengan idealisasi untuk model peleg sebagai massa tersendiri sebelum beban sampai ban sebagai pegas-redaman. Analisis kasus ini berupa analisis separuh mobil atau analisis dalam dua dimensi, dapat diamati Gambar 1.9. Analisis *keseluruhan mobil* (3D) dapat dilakukan dari idealisasi model sesuai Gambar 1.10.

## 1.6 Elemen Pegas

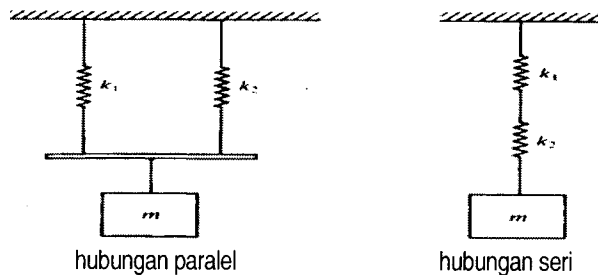
Elemen pegas merupakan idealisasi dari asumsi untuk koneksi antar benda *lamp mass*. Elemen pegas dapat juga sebagai idealisasi elemen mesin yang berkelakuan seperti pegas, yaitu mempunyai elastisitas atau idealisasi seperti benda riil pegas, misalnya pegas daun penyangga bak truk, dan pegas spiral penyangga body mobil bagian depan. Apabila sifat elastisitas dikatakan linier maka hubungan untuk pegas tersebut disebut pegas linier. Pegas linier adalah salah satu jenis penghubung mekanik yang secara umum diasumsikan dengan massa dan efek redamanannya diabaikan. Gaya pegas berbanding lurus dengan deformasinya, seperti terlihat pada persamaan berikut:

$$F = k \cdot x \quad (1.4)$$

di mana  $F$  adalah gaya pegas dengan deformasi sebesar ' $x$ ' dan konstanta pegas  $k$ . Dalam banyak kasus, beberapa pegas linier digunakan secara kombinasi. Pegas-pegas ini dapat dikombinasikan menjadi satu pegas yang ekuivalen.

### Kasus 1. Hubungan Pegas Paralel

Pegas dalam susunan paralel, seperti dinyatakan pada Gambar 1.11(a), jika  $W$  adalah berat dari suatu massa  $m$ , maka kita dapat mencari persamaan keseimbangan benda yaitu:



Gambar 1.11 Kombinasi pegas seri dan paralel

$$W = k_1 \delta_{st} + k_2 \delta_{st} \quad (1.5a)$$

di mana  $\delta_{st}$  defleksi statik. Jika ' $k_{eq}$ ' merupakan simbol konstanta pegas ekuivalen dari kombinasi dua pegas, pada kasus ini, dan pegas mengalami defleksi statik yang sama, maka persamaannya menjadi:

$$W = k_{eq} \delta_{st} \quad (1.5b)$$

Dari persamaan 1.5a dan 1.5b diperoleh:

$$k_{eq} = k_1 + k_2 \quad (1.6)$$

Secara umum jika kita memiliki  $n$ -pegas dengan konstanta pegas dari ' $k_1$ ,  $k_2$ , ..., sampai  $k_n$ ' dalam susunan paralel maka konstanta pegas ekuivalen  $k_{eq}$  diperoleh:

$$k_{eq} = k_1 + k_2 + \dots + k_n \quad (1.7)$$

### Kasus 2. Hubungan Pegas Seri

Pembahasan kasus 2 adalah untuk pegas dalam susunan seri, seperti dinyatakan Gambar 1.11 (b). Karena benda mendapat gaya  $W$  yang sama maka kita dapati keseimbangannya sebagai berikut:

$$\begin{aligned} W &= k_1 \delta_1 \\ W &= k_2 \delta_2 \end{aligned} \quad (1.8)$$

$\delta_1$  dan  $\delta_2$  defleksi pegas 1 dan pegas 2. Total defleksi dari ke-2 pegas tersebut sama dengan defleksi statik yang terjadi, yaitu:

$$\delta_{st} = \delta_1 + \delta_2 \quad (1.9)$$

Jika  $k_{eq}$  merupakan simbol konstanta pegas ekuivalen, untuk defleksi statik yang sama maka persamaannya menjadi:

$$W = k_{eq} \delta_{st} \quad (1.10)$$

Dari persamaan 1.9 dan persamaan 1.8 diperoleh:

$$k_1 \delta_1 = k_2 \delta_2 = k_{eq} \delta_{st} \quad (1.11)$$

$$\text{atau} \quad \delta_1 = \frac{k_{eq} \delta_{st}}{k_1} \quad \text{dan} \quad \delta_2 = \frac{k_{eq} \delta_{st}}{k_2} \quad (1.12)$$

Substitusikan persamaan 1.12 ke persamaan 1.10 sehingga diperoleh:

$$\frac{k_{eq} \delta_{st}}{k_1} + \frac{k_{eq} \delta_{st}}{k_1} = \delta_{st} \text{ atau } \frac{1}{k_{eq}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_1} \quad (1.13)$$

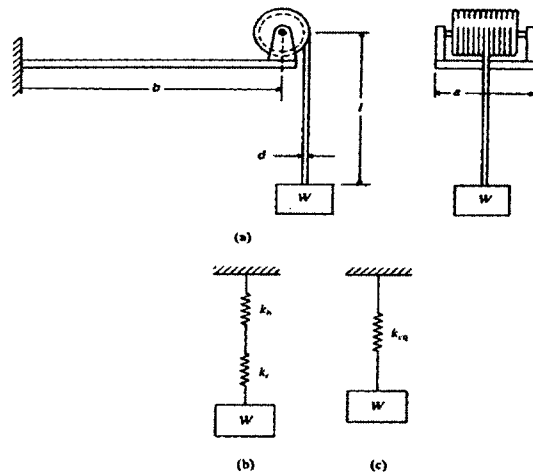
Secara umum persamaan 1.13 untuk kasus dengan n pegas disusun seri

$$\frac{1}{k_{eq}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_1} + \dots + \frac{1}{k_n} \quad (1.14)$$

Penggunaan hubungan seri dan paralel dinyatakan dalam kasus tertentu sebagai pegas yang dihubungkan dengan komponen *rigid* seperti pulley, lever, dan roda gigi. Untuk kasus dengan konstanta ekuivalen pegas ditemukan dengan menggunakan energi ekuivalen seperti pada Contoh 1.1 berikut ini.

### Contoh 1.1

Sebuah *Hoisting Drum* dipasang pada ujung dari sistem cantilever seperti terlihat pada Gambar 1.9(a). Tentukan konstanta ekuivalen dari pegas sistem dengan kawat baja yang menjulur panjang  $l$  dari hoisting drum. Asumsikan: diameter kawat baja 'd' dan modulus young batang dan kawat baja bahan sama, yaitu dengan 'E'.



Gambar 1.12 Hoisting drum

### Jawab contoh 1.1:

**Diketahui :** Dimensi batang cantilever, panjang =  $b$ , lebar =  $a$   
ketebalan =  $t$ , Modulus young batang =  $E$ , panjang kawat  
baja =  $l$ , diameter =  $d$ , dan modulus young kawat baja =  $E$ .

**Tentukan :** Konstanta pegas ekuivalen dengan susunan pegas seri

**Jawab :** Konstanta pegas dari batang cantilever diperoleh dari ekuivalen lendutan cantilever sederhana sesuai hubungan dalam mekanika teknik, yaitu:

$$k_b = \frac{3EI}{b^3} = \frac{3E}{b^3} \left( \frac{1}{12} at^3 \right) = \frac{Eat^3}{4b^3}$$

Kekakuan dari kawat baja akibat beban aksial dicari dari asumsi hubungan pegas dan defleksi, sebagai berikut:

$$k_r = \frac{AE}{l} = \frac{\pi d^2 E}{4l}$$

Batang cantilever dan kawat baja dapat ditinjau sebagai pegas yang disusun seri sehingga konstanta pegas ekuivalennya adalah:

$$\frac{1}{k_{eq}} = \frac{1}{k_b} + \frac{1}{k_r} = \frac{4b^3}{Eat^3} + \frac{4l}{\pi d^2 E}$$

atau:

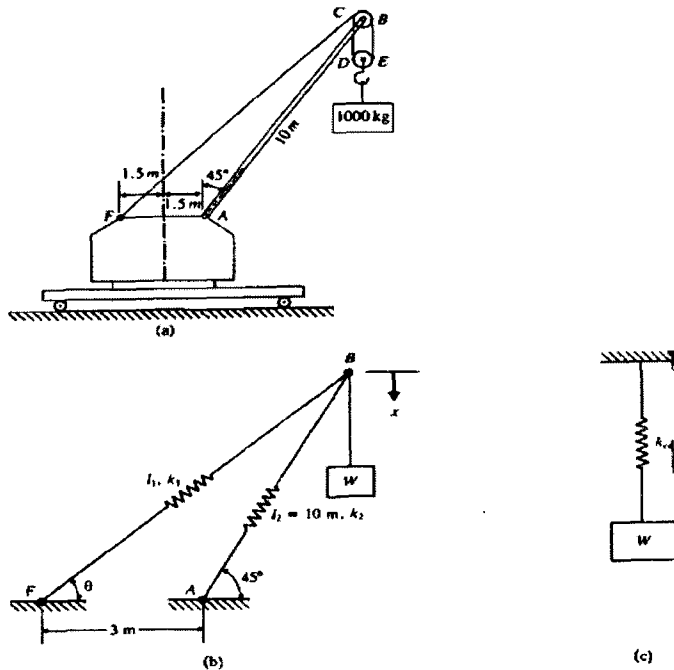
$$k_{eq} = \frac{E}{4} \left( \frac{\pi at^3 d^2 b^3}{\pi d^2 b^3 + lat^3} \right)$$

### Contoh 1.2

Sebuah penyangga umumnya terdiri dari susunan *truss* (asumsi rangka batang hanya mengalami gaya tarik-tekan) atau *boom* (penyangga beban, asumsi batang frame berupa cantilever hollow atau tengah berlubang) yang terbuat dari material baja. Sebut saja penyangga tersebut sebagai batang AB dengan pengontrol ketinggian dari tali baja di atasnya. Peralatan ini disebut *crane* (salah satu jenis Pesawat Pengangkat Beban), lihat Gambar 1.13(a). Truss juga dapat idealisasi dari tali baja, termasuk tali baja di mana digantungkan



beban. Batang baja yang uniform dengan panjang 10 m dan luas penampang  $2500 \text{ mm}^2$ . Beban dengan massa 1000 kg menggantung pada crane ketika crane dalam keadaan diam. Kabel CDEBF terbuat dari baja yang memiliki luas penampang  $100 \text{ mm}^2$ . Abaikan pengaruh dari kabel CDEB, tentukan konstanta pegas ekuivalen dari sistem dalam arah vertikal. Idealisasi rangkaian pegas dinyatakan pada Gambar 1.13(b), dan rangkaian ekuivalen dapat diamati dari Gambar 1.13(c).



Gambar 1.13 Crane pengangkat beban

**Diketahui :** Batang AB Panjang = 10 m,  $A_1 = 2500 \text{ mm}^2$ ,  
Material baja  
Kabel FB,  $A_2 = 100 \text{ mm}^2$ , Material baja  
Jarak base AF = 3 m

**Tentukan :** Konstanta pegas ekuivalen sistem  
Pendekatan ekuivalen energi potensial pegas seri-paralel

**Jawab :** Vertical displacement  $x$  pada titik B akan menyebabkan pegas  $k_2$  (batang AB) terdeformasi sejauh  $x_2 = x \cos 45^\circ$ , kemudian

pegas  $k_1$  (kabel FB) terdeformasi sejauh  $x_1 = x \cos (90^\circ - \theta)$ . Panjang kabel FB diasumsikan dengan satu satuan panjang, sehingga persamaannya menjadi:

$$l_1^2 = 3^2 + 10^2 - 2(3)(10)\cos 135^\circ = 151,426, \quad l_1 = 12,3055 \text{ m}$$

Sudut  $\theta$  sebagai kemiringan tali baja digunakan untuk mempertahankan kondisi seimbang beban menjadi:

$$l_1^2 + 3^2 - 2(l_1)(3)\cos \theta = 10^2, \quad \cos \theta = 0,8184, \quad \theta = 35,0736^\circ$$

Total energi potensial yang disimpan dalam pegas  $k_1$  dan dalam pegas  $k_2$  diberikan oleh persamaan berikut ini:

$$U = \frac{1}{2}k_1(x \cos 45^\circ)^2 + \frac{1}{2}k_2[x \cos (90^\circ - \theta)]^2$$

Persamaan ini merupakan rumus persamaan energi pegas sebagai  $U = \frac{1}{2}kx^2$ , di mana defleksi  $x$  mengikuti posisi tali baja dan boom yang sudah miring, sehingga:

$$k_1 = \frac{A_1 E_1}{l_1} = \frac{(100 \times 10^{-6})(207 \times 10^9)}{12,3055} = 1,6822 \times 10^6 \text{ N/m}$$

Dan untuk konstanta pegas ke-2 dengan cara yang sama menjadi:

$$k_2 = \frac{A_2 E_2}{l_2} = \frac{(2500 \times 10^{-6})(207 \times 10^9)}{10} = 5,1750 \times 10^6 \text{ N/m}$$

Harga  $U$  dapat diketahui dan dapat dihitung dari harga  $k_1$  dan  $k_2$  yang diper-oleh di atas. Harga  $U$  ini sama dengan harga dengan menggunakan  $k_{eq}$  sebagai asumsi dari pegas ekuivalen. Dalam arah vertikal  $k_{eq}$  mengalami deformasi sejauh asumsi ' $x$ '. Oleh sebab itu energi potensial ekuivalen pada pegas ( $U_{eq}$ ) dengan persamaan berikut:

$$U_{eq} = \frac{1}{2}k_{eq}x^2$$

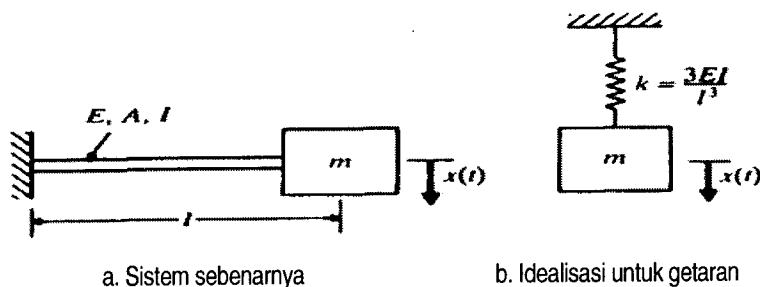
Dengan melakukan setting kondisi  $U = U_{eq}$  maka kita peroleh konstanta pegas ekuivalen sistem menjadi:

$$k_{eq} = 26,4304 \times 10^6 \text{ N/m}$$

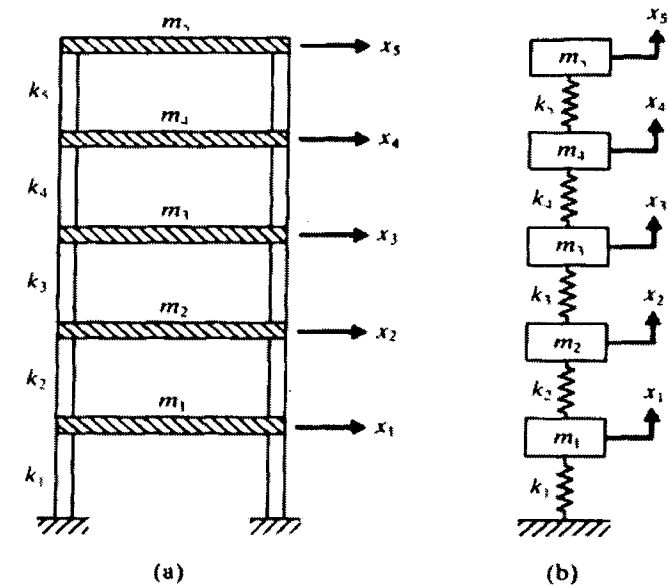
## 1.7 Elemen Massa atau Inersia

*Inertia* atau kelembaman merupakan sifat kecenderungan suatu benda untuk melawan beban aksi yang diterimanya. Umumnya benda memiliki kapasitas bertahan terhadap benda lain, dan apabila benda tidak dapat bertahan dari beban yang diterima maka benda tersebut akan hancur. Ketahanan benda dinyatakan dengan gerakan sebagai bentuk tambahan energi dalam yang diterima dari beban. Gerakan ini merupakan ciri dari kelembaman benda. Keadaan dapat berbeda bila elemen massa atau inersia diasumsikan sebuah benda rigid, di mana benda ini dapat menerima atau kehilangan energi kinetik ketika kecepatan benda tersebut berubah. Dari hukum ke-2 untuk gerakan Newton, hasil kali massa dan percepatannya adalah gaya yang dikenai pada benda. Kerja 'gaya dikalikan perpindahan' benda dengan harga kerja positif bila perpindahan searah gaya yang bekerja. Atau usaha merupakan kerja yang berlangsung disimpan oleh massa dalam bentuk energi kinetik dari massa.

Dalam kebanyakan kasus kita harus menggunakan model matematika untuk merepresentasikan sistem getaran dengan beberapa kemungkinan model matematika. Tujuan dari analisis seringkali untuk menentukan model matematika mana yang tepat. Satu model matematika yang dipilih, maka elemen massa atau inersia dari sistem dapat dengan mudah diidentifikasi. Sebagai contoh, perhatikan batang cantilever lihat Gambar 1.14(a). Terhadap gambar ini dapat dilakukan analisis cepat dan logis, bahwa massa dan peredam dari batang yang menghubungkan tumpuan dengan benda dapat diabaikan. Sistem dapat dimodelkan sebagai sistem pegas-massa SDOF seperti terlihat pada Gambar 1.14(b). Persoalannya adalah seberapa akurat koefisien pegas  $k$  kita asumsikan agar idealisasi Gambar 1.14(b) mendekati kenyataan.



Gambar 1.14 Cantilever dengan massa di ujung



Gambar 1.15 Idealisasi gedung bertingkat sistem MDOF

Massa  $m$  yang ada di ujung cantilever merepresentasikan elemen massa, dan elastisitas batang sebagai kekakuan pegas. Berikutnya, perhatikan sebuah gedung bertingkat yang mengalami gempa bumi. Asumsikan bahwa massa dari kerangka dinding diabaikan karena relatif kecil dibandingkan dengan massa lantai. Atau, ada perhitungan asumsi efektif dari sejauh mana kekakuan lantai dapat ditambahkan akibat pengaruh massa dinding. Bangunan dapat dimodelkan sebagai sebuah multi derajat kebebasan seperti terlihat pada Gambar 1.15. Massa lantai dari berbagai tingkat merepresentasikan elemen massa dan elastisitas rangka arah vertical sebagai elemen pegas.

Dua contoh berikut ini merupakan praktek idealisasi model beberapa massa yang ada dikombinasikan menjadi satu massa ekuivalen untuk mempermudah analisis, seperti pembahasan berikut:

### Kasus 1. Massa yang bertranslasi dengan sebuah benda rigid.

Seperti pada Gambar 1.13 (a), ada beberapa massa yang menempel pada batang dengan salah satu ujungnya diengsel. Sebuah massa ekuivalen dapat diasumsikan ada di sepanjang batang. Agar lebih spesifik, kita asumsikan lokasi dari massa ekuivalen dengan ' $m_1$ '. Kecepatan dari massa  $m_2$  ( $dx_2/dt$ )

dan  $m_3$  adalah ( $x_3$ ), dapat diekspresikan dalam terminologi kecepatan  $m_1$  ( $\dot{x}_1$ ). Dengan mengasumsikan displacement angular batang kecil maka:

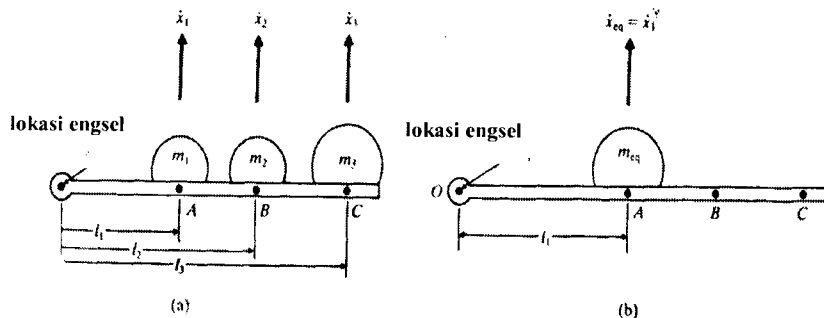
$$x_2 = \frac{l_2}{l_1} x_1; \quad x_3 = \frac{l_3}{l_1} x_1 \quad (1.15)$$

dan

$$\dot{x}_{eq} = \dot{x}_1 \quad (1.16)$$

Dengan menerapkan persamaan energi kinetik dari ketiga massa sistem untuk mendapatkan massa ekuivalen, diperoleh persamaan:

$$\frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 + \frac{1}{2} m_3 \dot{x}_3^2 = \frac{1}{2} m_{eq} \dot{x}_{eq}^2 \quad (1.17)$$



Gambar 1.16 Massa translasi dengan rigid body

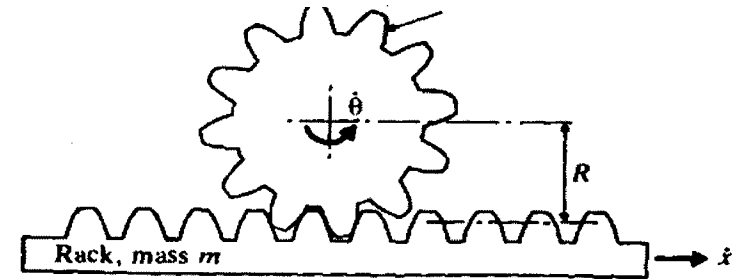
Dengan mensubstitusikan persamaan 1.15 dan 1.16 diperoleh:

$$m_{eq} = m_1 + \left(\frac{l_2}{l_1}\right)^2 m_2 + \left(\frac{l_3}{l_1}\right)^2 m_3 \quad (1.18)$$

### Kasus 2. Massa yang bertranslasi dan berotasi bergerak bersamaan.

Sebuah massa 'm' memiliki kecepatan translasi ' $dx/dt$ ' dikopel dengan massa yang lain (massa dari momen inersia ' $J_0$ ') yang memiliki kecepatan rotasional ' $d\theta/dt$ ' pada susunan rack dan pinion seperti pada Gambar

1.17(b). Dua massa tersebut dapat berkombinasi untuk memperoleh sebuah massa ekuivalen yang bertranslasi,  $m_{eq}$ , atau sebuah massa ekuivalen yang berotasi,  $J_{eq}$ , seperti dijelaskan berikut ini.



Gambar 1.17 Massa bertranslasi dan berotasi

Massa ekuivalen yang bertranslasi, yang untuk kasus ini energi kinetik dari kedua massa tersebut diberikan sebagai berikut:

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} J_0 \dot{\theta}^2 \quad (1.19)$$

Energi kinetik ekuivalen dapat diekspresikan sebagai berikut:

$$T_{eq} = \frac{1}{2} m_{eq} \dot{x}_{eq}^2 \quad (1.20)$$

Karena  $\dot{x}_{eq} = \dot{x}$  dan  $\dot{\theta} = \dot{x}/R$ , maka ekuivalensi  $T$  dan  $T_{eq}$  membentuk persamaan berikut ini:

$$\frac{1}{2} m_{eq} \dot{x}^2 = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} J_0 \left(\frac{\dot{x}}{R}\right)^2 \quad (1.21)$$

sehingga:

$$m_{eq} = m + \frac{J_0}{R^2} \quad (1.22)$$

## 1.8 Elemen Peredam

Umumnya energi getaran yang timbul dari proses gerakan benda diserap oleh udara sebagai panas atau bunyi. Idealisasi benda dengan kemampuan dapat *mengalirkan panas atau suara ke udara* disebut dengan *peredaman*, dengan simbol *redaman* pada model. Jadi idealisasi model untuk peredaman tidak selalu sama dengan redaman dari defleksi yang terjadi dari operasional aktuator. Meskipun demikian jumlah energi yang dikonversikan ke panas atau suara relatif kecil.

Pertimbangan adanya idealisasi redaman menjadi hal yang sangat penting untuk sebuah prediksi yang akurat terhadap respons getaran sebuah idealisasi model sistem. Hal ini antara lain disebabkan oleh asumsi dari benda yang dianggap tak bermasa dan tidak memiliki elastisitas, tetapi dapat berkelakuan sebagai peredam. Gaya peredaman hanya ada jika kecepatan relatif terjadi antara dua ujung lokasi peredam. Sangatlah sulit menentukan penyebab dari redaman dalam sistem secara praktis. Oleh karena itu redaman dimodelkan sebagai satu atau lebih jenis redaman berikut ini.

### 1. Redaman Viscous

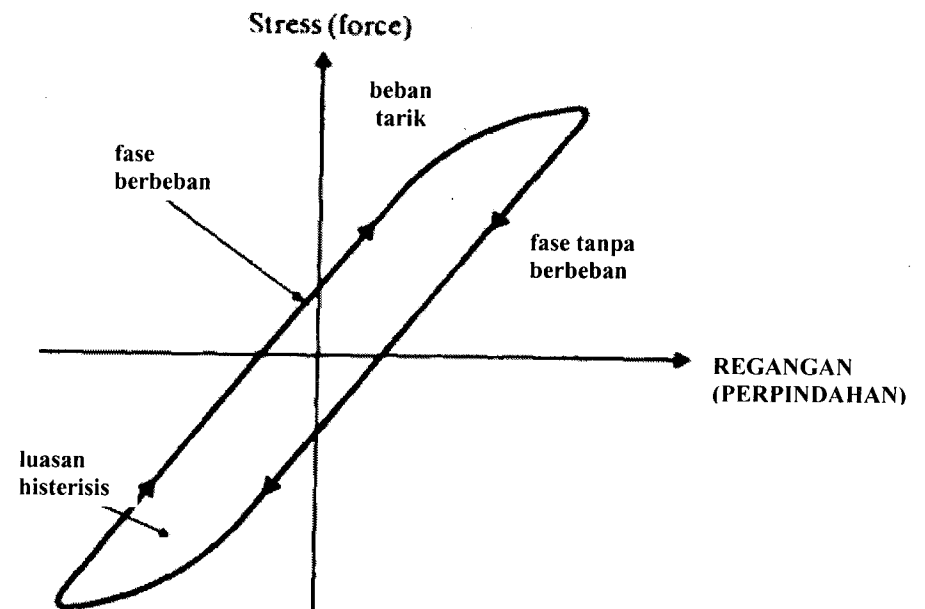
Jenis redaman ini paling banyak digunakan pada aplikasi model sistem getaran. Ketika sistem mekanis bergetar dalam sebuah media fluida, misalnya udara, air, atau minyak, maka akan timbul resistensi dari fluida yang menyebabkan energi sistem berkurang. Dalam kasus ini jumlah energi yang berkurang tergantung pada ukuran dan bentuk dari benda yang bergetar, viskositas fluida, frekuensi getaran, dan kecepatan getar benda. Dalam peredam viscous, gaya redaman proporsional dengan kecepatan dari benda yang bergetar. Contoh dari redaman jenis ini adalah lapisan tipis fluida di antara dua permukaan sliding, dengan contoh yaitu: aliran fluida dipermukaan piston dalam silinder, aliran fluida yang melintasi orifice dan lapisan fluida pada bantalan jurnal.

### 2. Redaman Coulumb

Gaya pada jenis redaman ini konstan besarnya tetapi arahnya berlawanan dengan gerakan benda yang bergetar. Hal ini disebabkan friksi yang terjadi akibat lubrikasi yang tidak sempurna terjadi atau pelumas yang tersedia tidak mencukupi.

### 3. Redaman Hysteretic

Apabila sebuah benda terdeformasi maka energinya akan diserap oleh material sehingga pada akhirnya berpindah pada atau ditiup udara. Hal itu disebabkan oleh adanya gesekan di internal material. Dalam hal ini *slip or slide* adalah bentuk deformasi yang sering terjadi. Ketika sebuah benda memiliki material redaman terhadap getaran, diagram tegangan-regangan memperlihatkan *hysteresis loop* yang ditunjukkan pada Gambar 1.18. Luasan loop menyatakan bahwa kehilangan energi per siklus disebabkan oleh redaman.



Gambar 1.18 Hysteresis loop untuk material elastik

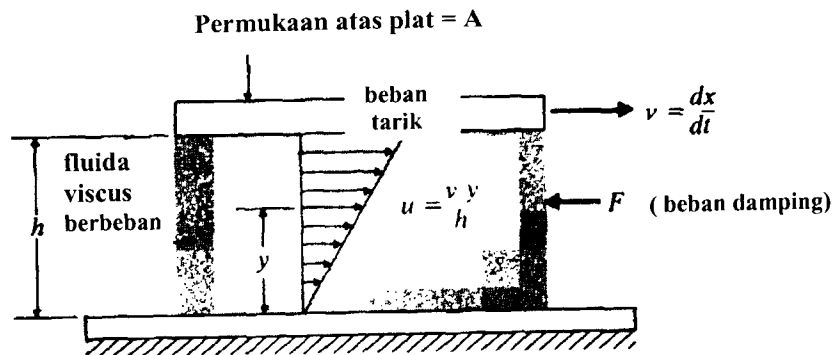
Konstruksi peredam viscous dapat dibuat menggunakan dua plat paralel yang dipisahkan sejauh  $h$  oleh fluida dengan viskositas  $\mu$ . Lihat Gambar 1.19. Salah satu plat diam sedangkan yang lain bergerak dengan kecepatan  $v$ . Lapisan fluida yang kontak dengan plat bergerak dengan kecepatan  $v$  sedangkan yang kontak dengan plat yang diam dan tidak bergerak. Kecepatan antara keduanya diasumsikan bervariasi secara linier antara 0 dan  $v$  seperti pada Gambar 1.19. Merujuk hukum Newton, pada aliran viscous, persamaan tegangan geser ( $\tau$ ) yang dikembangkan dalam lapisan fluida pada jarak  $y$  dari plat diam adalah sebagai berikut:

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} \quad (1.23)$$

$du/dy = v/h$  adalah gradien kecepatan. Gaya geser  $F$  yang terjadi pada bagian bawah permukaan plat yang bergerak menjadi:

$$F = \tau A = \frac{\mu A v}{h} = c v \quad (1.24)$$

$A$  adalah luas permukaan plat yang bergerak dan  $c = \frac{\mu A}{h}$  adalah konstanta redaman.



Gambar 1.19 Plat paralel dengan fluida viscus

Apabila model peredam diasumsikan dari susunan kombinasi plat dan fluida bertumpuk, langkah penyelesaian model mengikuti pembahasan pada Sub Bab 1.6 dan Sub Bab 1.7 (pegas dan inersia).

### Contoh 1.3

Dapatkan hubungan antara konstanta redaman  $c$  dalam diameter ' $D$  dan  $d$ ' untuk alat penekan (drop forging) pembuatan tabung cetak dari produk alat dashpot seperti diperlihatkan pada Gambar 1.20(a).

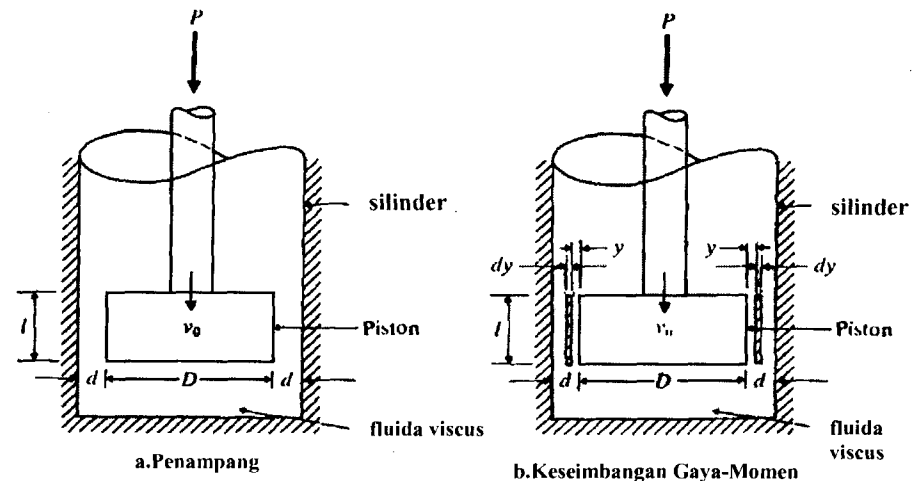
**Diketahui:** Diameter silinder =  $D + 2d$ , diameter piston =  $D$ , Kecepatan piston =  $v_0$ , panjang aksial piston =  $l$ , viskositas fluida =  $\mu$ .

**Tentukan :** Konstanta redaman dashpot ' $c$ '.

**Pendekatan :** Persamaan tegangan geser untuk aliran viscus. Persamaan laju aliran fluida.

**Solusi :** Seperti terlihat pada Gambar 1.20(a).

Dashpot terdiri dari piston dengan diameter  $D$ , panjang  $l$  dengan kecepatan  $v_0$  dengan silinder yang diisi fluida dengan viskositas  $\mu$ . Jarak antara piston dan dinding silinder didefinisikan sebagai  $d$ . Pada posisi  $y$  dari permukaan yang bergerak didefinisikan memiliki kecepatan  $v$  dan tegangan gesernya  $\tau$ , dan pada jarak  $(y+dy)$  dari permukaan yang bergerak yang didefinisikan memiliki kecepatan  $(v+dv)$  dengan tegangan gesernya  $(\tau+d\tau)$ , Gambar 1.1 (b). Tanda negatif pada  $dv$  menunjukkan kecepatan yang berkurang ketika piston bergerak maju. Gaya viscus pada ring annular sama dengan:



Gambar 1.20 Dashpot

$$F = \frac{\pi D}{d\tau} = \pi D \frac{d\tau}{dy} dy$$

Tetapi tegangan geser diberikan sebagai berikut:

$$\tau = -\mu \frac{dv}{dy}$$

Tanda negatif konsisten dengan penurunan gradien kecepatan. Dengan menggunakan dua persamaan sebelumnya, maka:

$$F = -\pi D / dy \mu \frac{d^2 v}{dy^2}$$

Gaya pada piston akan menyebabkan perbedaan tekanan di bagian akhir elemen. Persamaan tekanan tersebut adalah sebagai berikut:

$$p = \frac{4P}{\pi D^2}$$

Sehingga gaya tekan pada bagian ujung elemen menjadi:

$$p(\pi D \, dy) = \frac{4P}{\pi D^2} (\pi D \, dy) = \frac{4P}{D} dy$$

$(\pi D \, dy)$  menunjukkan luasan annular antara  $y$  dan  $(y+dy)$ .

Jika diasumsikan kecepatan rata-rata uniform dalam arah gerakan fluida maka gaya yang diberikan dalam tiga persamaan sebelumnya harus sama sehingga diperoleh persamaan berikut:

$$\frac{4P}{D} dy = -\pi D / dy \mu \frac{d^2 v}{dy^2} \quad \text{atau} \quad \frac{d^2 v}{dy^2} = -\frac{4P}{\pi D^2 / \mu}$$

Dengan melakukan integrasi dua kali dan menggunakan kondisi batas untuk  $v = -v_0$  di  $y = d$ , kita peroleh:

$$v = -\frac{2P}{\pi D^2 / \mu} (yd - y^2) - v_0 \left(1 - \frac{y}{d}\right)$$

Laju aliran yang melintasi ruang sisa antara ring dan dinding silinder diperoleh dengan mengintegrasikan laju aliran yang melintas antara elemen dengan batas  $y = 0$  dan  $y = d$ , sehingga diperoleh:

$$Q = \int_0^d v \pi D dy = \pi D \left[ \frac{2Pd^3}{6\pi D^2 l \mu} - \frac{1}{2} v_0 d \right]$$

Volume dari cairan yang melintasi ruang sisa pembakaran per detik harus sama dengan besar volume persamaan detik yang dipindahkan oleh

piston. Dengan demikian kecepatan piston akan sama dengan laju aliran dibagi luas piston yang diekspresikan dengan persamaan berikut:

$$v_0 = \frac{Q}{\pi D^2 / 4}$$

Substitusikan dua persamaan sebelumnya sehingga diperoleh:

$$P = \left[ \frac{3\pi D^3 l \left(1 + \frac{2}{D}\right)}{4d^3} \right] \mu v_0$$

Dengan menyatakan gaya sebagai  $P = cv_0$ , maka konstanta redaman menjadi sebagai berikut:

$$c = \left[ \frac{3\pi D^3 l \left(1 + \frac{2}{D}\right)}{4d^3} \right] \mu$$

## 1.9 Ringkasan

Sejarah ilmu getaran mekanis dimulai dari penemuan Galileo mengenai hubungan antara panjang pendulum dan frekuensinya serta pengamatannya terhadap resonansi dua benda yang dihubungkan oleh energi sebagai transfer getaran pada frekuensi yang sama.

Model matematika getaran dikembangkan untuk membantu analisis getaran di mana perilaku getaran dapat berupa model linier maupun non-linier. Dengan ditemukannya komputer maka metode numerik kemudian menjadi salah satu solusi untuk memecahkan permasalahan getaran yang bersifat non-linier.

Koordinat bebas yang dibutuhkan untuk menentukan jumlah gerakan pada posisi semua bagian dari sistem untuk waktu tertentu, didefinisikan sebagai derajat kebebasan sistem. Sistem getaran memiliki derajat kebebasan satu sampai multi. Semakin tepat dalam menentukan jumlah derajat kebebasan, analisisnya akan menjadi semakin akurat.

Dalam bab ini juga diuraikan prinsip elemen dasar dari sistem getaran yang meliputi elemen pegas, inersia, dan peredam. Dalam buku ini untuk selanjutnya, *khusus lingkup materi getaran Lamp Mass* dibahas, dengan damper linear dan asumsi eksitasi teoritik diberlakukan untuk SDOF, DDOF, dan MDOF.

## 1.10 Pertanyaan untuk Pemahaman

1. Apa yang dimaksud dengan getaran ditinjau dari gerak melingkar? Gambarkan terjadinya getaran longitudinal dan transversal dari gerak melingkar tersebut!
2. Getaran merupakan salah satu contoh fenomena alam. Jelaskan pernyataan ini!
3. Gambarkan model getaran dari idealisasi gedung bertingkat dan tuliskan persamaannya!
4. Sebutkan delapan macam getaran sesuai klasifikasinya!
5. Apa maksud pernyataan: "Pembuatan model getaran mengikuti tujuan bagian mana yang dianalisis?" Buat dua contoh idealisasi model mobil yang mendukung pernyataan ini!
6. Getaran merupakan salah satu analisis kekuatan. Sebutkan analisis kekuatan yang lain dan klasifikasikan sesuai urutan frekuensi pembebanan dan frekuensi kejadian!
7. Jelaskan perbedaan idealisasi model getaran *lamp mass* dengan *continuous mass* dalam hal jumlah DOF (*Degree of Freedom*), bagian produk yang dianalisis, dan persamaan umum getaran yang digunakan!
8. Jelaskan pernyataan berikut: "Resultan tahanan listrik (R) mempunyai aturan berlawanan dengan resultan rangkaian seri-paralel pegas." Nyatakan pernyataan ini dengan rumus!
9. Sebutkan tiga macam redaman yang digunakan sebagai idealisasi dalam getaran!
10. Apa yang Anda ketahui tentang redaman histeresis?

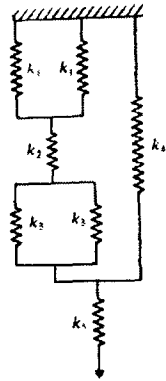
## 1.11 Soal

1. Sebuah benda bergetar dengan getaran harmonik sederhana (tanpa meninjau bentuk persamaan getaran) dengan amplitudo 10 mm pada frekuensi 50 Hz. Tentukan:
  - a. Kecepatan maksimum benda
  - b. Percepatan maksimum benda
2. Kecepatan maksimum benda yang bergetar dengan getaran harmonik sederhana adalah 3 cm/det dengan periode getaran tetap yang diukur adalah 0.15 detik. Tentukan:
  - a. Amplitudo maksimum benda
  - b. Percepatan maksimum benda
3. Sebuah partikel mengalami getaran *underdamped* dengan persamaan sebagai berikut:
 
$$x(t) = 0.75e^{-1.2t} \sin(2.5t + 0.28) \text{ m}$$
 Berapakah besar kecepatan dan percepatan partikel, keduanya untuk  $t = 3$  detik?
4. Kontur suatu gundukan jalan disumsikan memenuhi persamaan berikut:
 
$$y(x) = 0.05 \sin(0.125x) \text{ m}$$
 Berapakah amplitudo dan akselerasi vertikal dari ban mobil ketika melintasi gundukan tersebut pada kecepatan konstan 40 m/s, pada  $t = 5$  detik?
5. Sebuah mobil melintasi jalan yang kasar. Buatlah model getaran dengan mempertimbangkan:
  - (a) Berat body mobil, penumpang, tempat duduk, roda depan dan roda belakang;
  - (b) elastisitas roda (suspensi), pegas, tempat duduk;
  - (c) Redaman dari tempat duduk, shock absorber, dan roda.

Buat idealisasi model ketiga (semua) mobil (a, b, dan c) dengan pendekatan gambar *lamp mass* menggunakan proses sistem perbaikan secara gradual mengikuti Gambar 1.8.

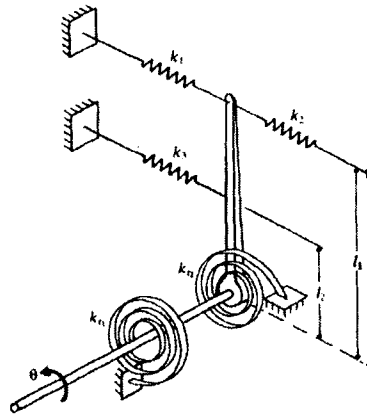


6. Tentukan konstanta pegas ekuivalen gambar (a) pada halaman berikutnya!



Gambar (a)

7. Tentukan konstanta pegas ekuivalen gambar (b) di bawah ini dalam arah perpindahan koordinat polar ' $\theta$ '!

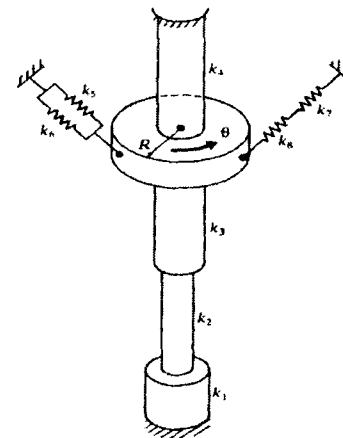


Gambar (b)

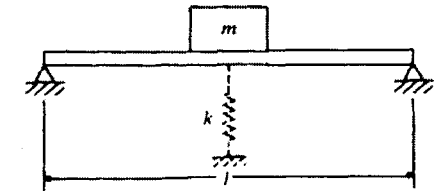
8. Tentukan konstanta pegas ekuivalen torsional mengikuti gambar (c)!
9. Sebuah mesin dengan massa  $m = 1000$  kg ditopang oleh sebuah batang baja dengan panjang  $l = 3$  m yang memiliki dimensi penampang segi-4 yaitu, tinggi = 5 cm, dan lebar = 10 m, dan modulus elastisitas young  $E = 2,05 \times 10^{11}$  N/m<sup>2</sup>. Untuk mengurangi defleksi vertikal dari batang, sebuah pegas dipasang di tengah seperti terlihat pada Gambar (d).

## Tentukan:

- Nilai konstanta pegas yang diperlukan untuk mengurangi defleksi batang menjadi  $1/3$  dari defleksi awal tanpa pegas.
- Konstanta pegas untuk pengurangan defleksi  $1/2$ ,  $3/4$ , dan  $5/6$ , asumsikan massa batang diabaikan.
- Plot hasil defleksi terhadap rasio kekakuan tersebut.
- Beri komentar anda tentang grafik ini.

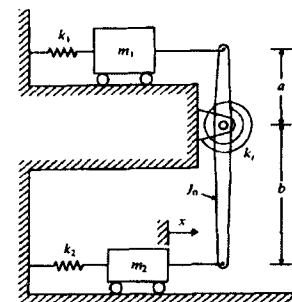


Gambar (c)

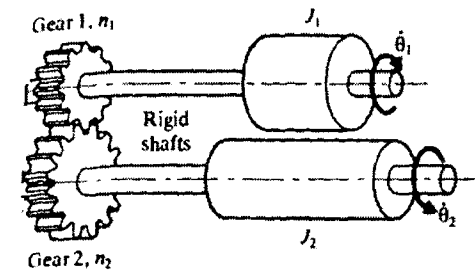


Gambar (d)

10. Tentukan massa ekuivalen dari roker arm pada gambar (e) dengan mengacu pada koordinat kartesian ' $x$ '!

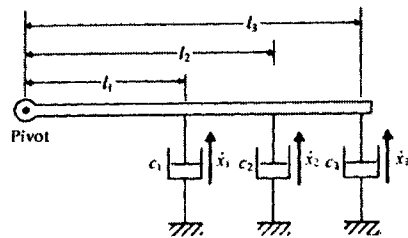


Gambar (e)



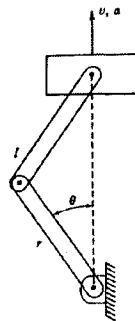
Gambar (f)

11. Dua massa yang memiliki momen inersia ' $J_1$ ' dan ' $J_2$ ' diletakkan pada poros berputar yang dihubungkan dengan roda gigi seperti yang terlihat pada gambar (f). Jika jumlah gigi dari roda gigi '1' dan '2' adalah ' $n_1$ ' dan ' $n_2$ ', tentukan massa ekuivalen dari momen inersia yang berhubungan dengan ' $\theta_1$ '!
12. Tentukan konstanta ekuivalen redaman jika 3 peredam disusun paralel, gambar (g)!
13. Tentukan konstanta ekuivalen redaman jika 3 peredam disusun seri dan diletakkan pada ujung batang!
14. Tentukan konstanta ekuivalen redaman jika 3 peredam dihubungkan oleh sebuah rigid body seperti tampak pada gambar di bawah ini, Gambar (g)!



Gambar (g)

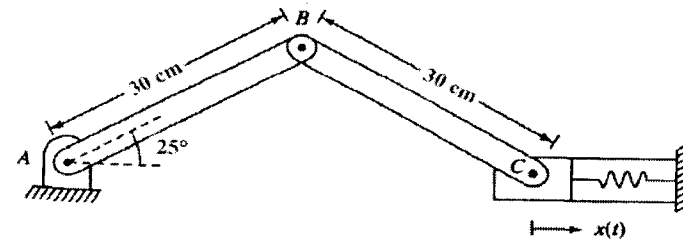
15. Gambar menunjukkan skematik satu silinder resiprokating dengan kecepatan ' $v$ ' dan percepatan ' $a$ '. Tentukan percepatan angular dari ' $v$ ', ' $a$ ', sebagai fungsi dari radius crank ' $r$ ', connecting rod ' $l$ ', dan sudut crank ' $\theta$ '!



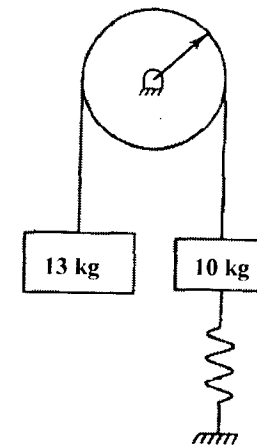
16. Mekanisme di bawah ini dalam posisi keseimbangan. Displacement horizontal dari collar pada posisi ini adalah:

$$x(t) = 0,05 \sin 20t \quad (\text{m})$$

Tentukan kecepatan dan percepatan angular dari batang AB sebagai fungsi dari waktu!

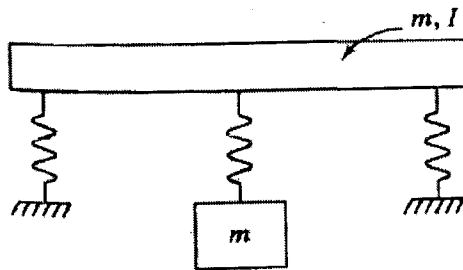


17. Berapakah kecepatan angular maksimum yang dihasilkan oleh piringan dengan masa 10 kg seperti gambar di bawah ini jika massa balok masing 13 kg ditarik sejauh 10 mm kemudian dilepaskan, mengikuti gambar di bawah ini?

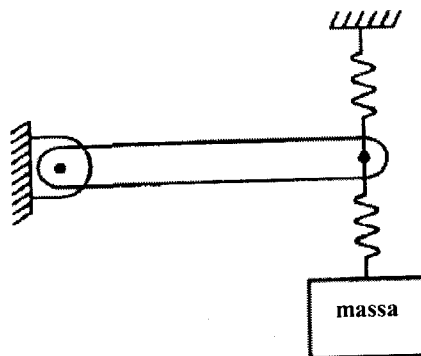


18. Sebuah *forge hammer* dengan massa 500 kg dipasang pada 4 pegas yang identik, dengan masing-masing stiffness  $k = 4500 \text{ N/m}$ . Selama proses forging, pemberat 110 kg dari komponen dijatuhkan pada ketinggian 1,4 m ke anvil. Berapakah displacement maksimum pada mesin setelah impact terjadi?

19. Berapa derajat kebebasan yang dibutuhkan model dari gambar di bawah ini? Identifikasi sejumlah koordinat umum yang digunakan untuk menganalisis sistem getaran!



20. Berapa derajat kebebasan yang dibutuhkan model dari gambar di bawah ini? Identifikasi sejumlah koordinat umum yang digunakan untuk menganalisis sistem getaran!



# BAB 2

## GETARAN BEBAS SISTEM SATU DERAJAT KEBEBASAN

Kompetensi yang ingin dicapai setelah mempelajari bab ini adalah:

1. Memahami solusi dari idealisasi fenomena getaran bebas.
2. Memahami parameter dan konstanta sistem getaran bebas, seperti frekuensi natural, periode getaran, dan amplitudo.
3. Mampu melakukan analisis terhadap permasalahan getaran bebas tak teredam yang ada atau yang diberikan untuk sistem satu derajat kebebasan.
4. Memahami hasil analisis getaran dan konsekuensinya, antara lain terhadap frekuensi natural teredam dan rasio redaman.
5. Mampu melakukan pemodelan dan analisis permasalahan getaran bebas teredam untuk sistem satu derajat kebebasan.

### 2.1 Pendahuluan

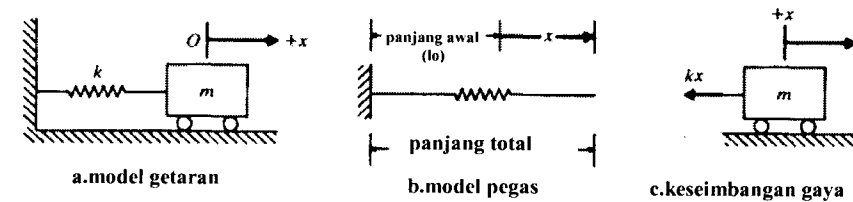
Getaran bebas adalah osilasi suatu sistem ke posisi keseimbangan yang terjadi tanpa adanya eksitasi gaya dari luar. Getaran bebas merupakan hasil perpindahan atau *impart* energi kinetik, atau sebuah perpindahan dari titik keseimbangan yang menghasilkan perbedaan energi potensial dari posisi keseimbangan sistem kondisi sebelumnya. Getaran bebas umumnya terjadi mengikuti awal tinjauan yang dilakukan, misalnya saat ditinjau benda yang bergetar tersebut sudah tidak menerima beban dari luar (bergetar bebas), padahal kejadian benda ini sebelumnya dapat bergetar dengan beban luar. Beban luar tersebut umumnya adalah beban impact, beban gangguan, dan beban sentuhan pada defleksi tertentu kemudian sentuhan tersebut terlepas. Dengan demikian getaran bebas dapat dikelompokkan menjadi dua, yaitu

getaran bebas tak teredam *undamped system* dan getaran bebas teredam (*damped system*).

Kejadian getaran suatu benda selalu dikaitkan dengan osilasi mekanis sehingga osilasi mekanis dapat dijadikan solusi yang identik dengan kejadian lain dalam bidang yang lain. Misalnya, gelombang elektromagnetik, akustik, dan arus listrik bolak-balik. Dapat terjadi pula suatu kondisi interaksi antara masalah yang disebutkan tersebut meskipun dalam kejadian yang berbeda, misalnya getaran mekanis yang menyebabkan perubahan tahanan material sehingga terjadi osilasi arus listrik atau kejadian dapat sebaliknya. Tetapi prinsip dasar untuk analisis, perumusan persamaan matematik, serta persamaan gelombang sebagai fenomena getaran adalah identik pada setiap bidang yang disebutkan tersebut. Dilihat dari derajat kebebasan, getaran dibagi menjadi satu derajat kebebasan (*Single Degree of Freedom* - SDOF), dua derajat kebebasan (*DDOF*) atau banyak derajat kebebasan (*Multi Degree of Freedom* - MDOF). Derajat kebebasan adalah jumlah koordinat yang diinginkan pada benda untuk bergetar. Selain getaran bebas terdapat juga kelompok kedua, yaitu *getaran paksa*. Getaran bebas adalah getaran yang tidak mendapatkan atau tidak mengalami gangguan dari luar, sedangkan getaran paksa adalah getaran yang mendapat gangguan dari luar atau mendapatkan beban luar. Beban ini disebut *eksitasi*.

Pada Gambar 2.1, getaran bebas sistem satu derajat kebebasan dinyatakan dengan dua bagian benda, yaitu pegas ( $k$ ) dan massa ( $m$ ). Suatu sistem pegas-massa merupakan representasi sistem getaran yang paling sederhana. Sistem ini dikenal sebagai sistem satu derajat kebebasan, karena satu koordinat ( $x$ ) sudah mencukupi untuk menspesifikasikan posisi tertentu dari massa setiap waktu. Tidak ada eksitasi gaya eksternal pada massa sehingga gerakan merupakan hasil dari sebuah gangguan awal yang bergetar secara bebas. Karena tidak ada elemen yang menyebabkan energi hilang selama gerakan, amplitudo dari gerakan adalah konstan terhadap waktu. Sistem ini dikenal sebagai getaran bebas tak teredam (*undamped system*).

Kenyataannya, kecuali dalam kondisi vakum, amplitudo dari getaran bebas berkurang secara gradual yang disebabkan oleh resistensi udara sekitar. Sistem ini dikenal sebagai sistem getaran teredam (*damped system*). Pengenalan atas getaran bebas teredam dan tak teredam pada satu derajat kebebasan sangat fundamental untuk memahami topik-topik getaran lebih lanjut.



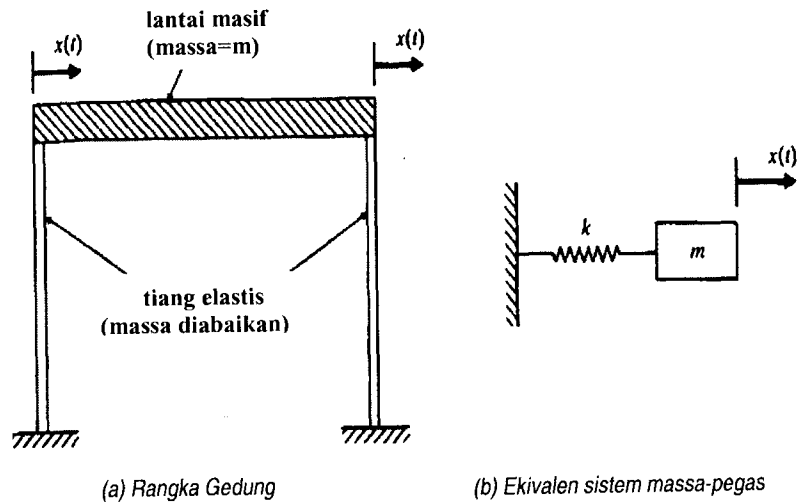
Gambar 2.1 Sistem pegas-massa posisi horizontal

Beberapa sistem mekanik dan struktur dapat diidealisasikan menjadi sistem satu derajat kebebasan. Dalam praktiknya massa terdistribusi, tetapi untuk memudahkan analisis, hal ini dapat didekati sebagai satu titik massa. Demikian pula dengan elastisitas sistem terdistribusi di sepanjang sistem juga dapat diidealisasikan sebagai pegas tunggal. Contohnya adalah rangka gedung seperti yang terlihat pada Gambar 2.2(a) yang dapat diidealisasikan menjadi sistem pegas-massa seperti yang terlihat pada Gambar 2.2(b). Dalam kasus ini konstanta pegas ' $k$ ' adalah perbandingan gaya terhadap defleksi yang dapat ditentukan dari geometris dan sifat material kolom. Hal yang sama dilakukan dengan mengidealisasikan massa di mana massa sistem adalah massa lantai sedangkan massa kolom diabaikan.

Penyusunan idealisasi model getaran menjadi persamaan getaran dari pendekatan konversi energi dengan dua pendekatan, yaitu (1) menggunakan sistem konservatif dengan asumsi dari energi total sistem yang selamanya tidak berubah dan sistem konservatif ini merupakan awal mula getaran diberlakukan, dan (2) pendekatan dari sistem kekekalan energi dengan asumsi berlaku untuk energi total sistem yang dinyatakan dengan energi potensial dan energi kinetik sesuai rumus berikut ini:

$$K.E. + P.E. = \text{tetap} \quad \text{atau} \quad \frac{d}{dt} K.E. + P.E. = 0 \quad (2.1)$$

Singkatan untuk usaha, yaitu  $K.E.$ , adalah energi kinetik dan  $PE$  sebagai energi potensial. Persamaan yang dihasilkan adalah persamaan gerakan sistem. Selanjutnya metode ini disebut metode energi. Semua penurunan persamaan getaran. Dalam bab ini, pembuatan persamaan getaran dilakukan dengan menggunakan metode ini. Persamaan 2.1 merupakan *differential equation* atau persamaan diferensial. Jika persamaan diferensial setelah dilakukan penyederhanaan menjadi linear, yaitu bentuk diferensial pangkat satu, maka getaran yang terjadi disebut getaran linear, sedangkan jika persamaan diferensialnya non-linier, getaran itu disebut getaran non-linear.



Gambar 2.2 Idealisasi rangka gedung

Analisis teori ini sangat penting dipahami untuk dapat meramalkan dan memahami fenomena getaran. Contoh pembagian kelompok getaran dijelaskan secara singkat. *Free Vibration* atau getaran bebas didefinisikan sebagai getaran yang terjadi pada suatu sistem. Misalnya, untuk bahasan dalam buku ini adalah sistem mekanisme tanpa pengaruh *exitation* atau eksitasi dari gaya luar sebagai fungsi waktu, kecuali impuls sesaat. Dengan kata lain, eksitasi diberikan pada waktu mesin start saja. *Forced Vibration* atau getaran paksa dapat didefinisikan sebagai getaran yang terjadi pada suatu sistem karena adanya rangsangan eksitasi yang dapat sebagai gaya. Jika rangsangan tersebut berosilasi maka sistem dipaksa untuk bergetar pada frekuensi rangsangan. Jika frekuensi rangsangan sama dengan salah satu frekuensi natural sistem maka akan dalam keadaan resonansi, dan osilasi menjadi besar dan berbahaya.

Persamaan getaran sistem secara umum dinyatakan dalam bentuk matriks. Persamaan ini merupakan kumpulan persamaan diferensial simultan dari turunan kekekalan energi yang tidak hanya melibatkan asumsi pegas, juga termasuk asumsi inersia benda, dan asumsi redaman viscous. Persamaan ini dapat dinyatakan dalam bentuk matriks:

$$[m]\{\ddot{x}\} + [c]\{\dot{x}\} + [k]\{x\} = \{F\} \quad (2.2)$$

di mana  $[m]$  adalah matriks massa,  $[c]$  merupakan matriks redaman,  $[k]$  matriks kekakuan, dan  $\{F\}$  matriks eksitasi gaya.

Solusi atau jawaban dari persamaan getaran merupakan gabungan atau superposisi dari hasil analisis terhadap dua kelompok atau dua bagian, yaitu *transien solution* atau solusi transien, dan *steady state solution* atau solusi khusus atau solusi tetap. Solusi transien diturunkan dari asumsi sistem getaran tanpa gaya eksitasi. Solusi transien ditujukan untuk mendapatkan karakteristik respons getaran tanpa beban, misalnya, frekuensi pribadi, seberapa redaman diperlukan agar sistem berhenti dan pada waktu berapa lama. Disebut *steady state* atau solusi khusus karena persamaan getaran yang diturunkan hanya berlaku pada kondisi dan harga parameter getaran tertentu mengikuti jenis persamaan eksitasi getaran. Untuk harga parameter getaran, dan bentuk eksitasi berupa gaya tertentu, solusi persamaan *steady state* tertentu juga.

Suatu rigid body yang mengalami gerakan planar adalah ketika pusat massanya bergerak pada sebuah bidang dan body yang berputar pada sumbu tetap, maka hukum kedua Newton dapat diterapkan untuk mendapatkan persamaan geraknya, yaitu:

$$\Sigma F = ma$$

$$\text{dan } \Sigma M_{CG} = I\alpha$$

'I' adalah momen inersia sedangkan CG adalah pusat gravitasi massa. Penerapan hukum kedua Newton rigid body membutuhkan *metode free body diagram* untuk mendapatkan solusinya. Ada dua free body diagram, yang pertama adalah free body diagram menggambarkan keseluruhan gaya dan momen eksternal yang dianalisis pada benda, dan yang kedua adalah free body diagram memperlihatkan gaya dan momen efektif. Konsep ini dinyatakan pada Gambar 2.3.

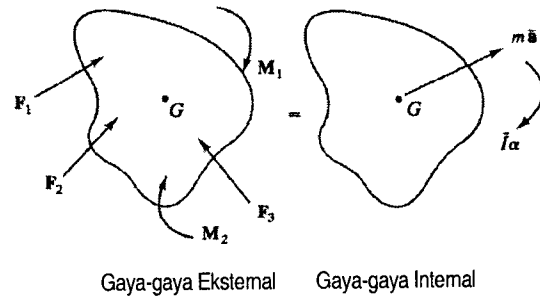
Konsep ini dapat diekspresikan dalam persamaan berikut:

$$\Sigma F_{Ext} = \Sigma F_{Eff} \quad (2.3)$$

dan

$$\Sigma Mo_{Ext} = \Sigma Mo_{Eff} \quad (2.4)$$

Penentuan resultan diambil dari sembarang titik 'G' sebagai pusat resultan dari rigid body.



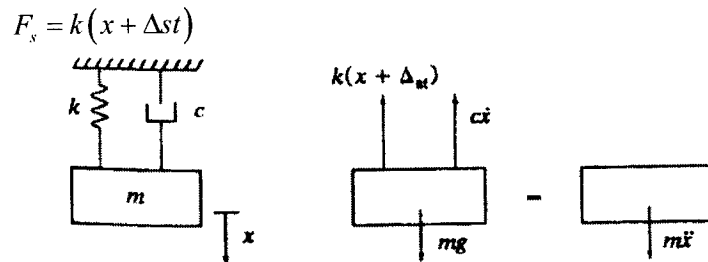
Gambar 2.3 Gaya dan momen eksternal pada body ekuivalen

### Contoh 2.1

Turunkan persamaan gerak dari sistem yang terlihat pada Gambar 2.4(a)!

#### Solusi:

Misalkan  $x$  adalah displacement dari balok. Sudah kita tetapkan bahwa arah  $x$  positif adalah ke arah bawah. *Free body diagram eksternal dan efektif* diperlihatkan pada Gambar 2.4. Dari gambar tersebut terlihat bahwa gaya statik tercipta dikarenakan displacement dari pegas yang memiliki konstanta  $k$ . Jika  $x$  diukur dari keseimbangan statik maka gaya statik dapat diekspresikan dengan persamaan berikut:



Gambar 2.4 Free body diagram Contoh 2.1

Dengan menerapkan hukum kedua Newton diperoleh:

$$\Sigma F_{Ext} = \Sigma F_{Eff}$$

$$mg - k(x + \Delta_{st}) - c\dot{x} = m\ddot{x}$$

Analisis posisi keseimbangan statik diperoleh:

$$\Delta_{st} = \frac{mg}{k}$$

Sehingga persamaan getaran bebas SDOF menjadi:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$

### Contoh 2.2

Turunkan persamaan gerak dari osilasi angular compound pendulum seperti yang dinyatakan pada Gambar 2.5(a)!

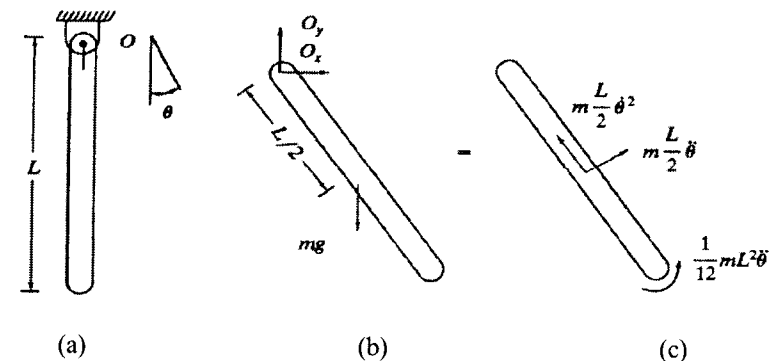
#### Jawab:

Misalkan  $\theta(t)$  adalah arah perpindahan batang ccw yang diukur dari posisi keseimbangan. Penjumlahan momen menggunakan free body diagram dari Gambar 2.5(b) diperoleh:

$$\Sigma Mo_{Ext} = \Sigma Mo_{Eff}$$

$$-mg \frac{L}{2} \sin \theta = m \frac{L^2}{12} \ddot{\theta} + m \frac{L}{2} \ddot{\theta} \frac{L}{2}$$

$$m \frac{L^2}{3} \ddot{\theta} + mg \frac{L}{2} \sin \theta = 0$$



Gambar 2.5 Free body diagram, Contoh 2.2

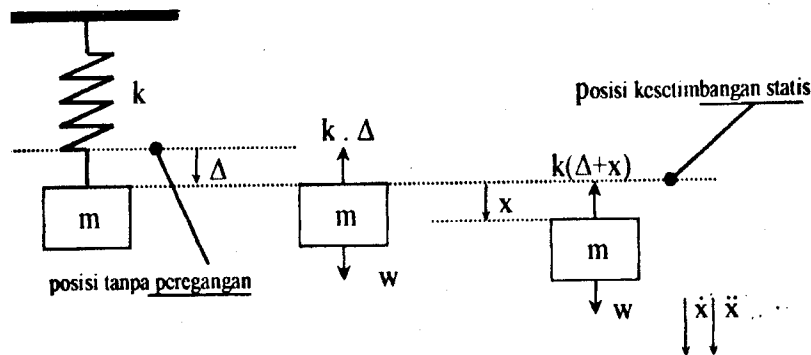
Dengan deret Taylor diperoleh untuk  $\theta$  yang kecil maka  $\sin\theta = \theta$  sehingga persamaan di atas menjadi:

$$\ddot{\theta} + \frac{3g}{2L}\theta = 0$$

## 2.2 Getaran Bebas Tak Teredam SDOF

Sistem getaran SDOF paling sederhana hanya terdiri dari satu massa dan satu pegas, seperti dinyatakan dalam Gambar 2.6a. Getaran bebas SDOF tak teredam ini hanya mempunyai satu konsentrasi massa dan massa tersebut bergantung pada sebuah pegas. Pegas merupakan penopang massa dengan asumsi kekakuan massa yang diabaikan. Hukum Newton kedua sebagai dasar gerakan pegas-massa ini dijabarkan dalam bentuk persamaan 2.5, yaitu:

$$k \cdot x = w = m \cdot g \quad (2.5)$$



Gambar 2.6a Diagram benda bebas getaran massa-pegas

Simpangan awal diperoleh sesuai dengan rumus statika, yaitu ' $x = F/k$ ' dan gaya yang bekerja ' $F$ ' sama dengan massa benda dikalikan gravitasi. Efek defleksi ' $x$ ' menyebabkan massa berosilasi. Jika diasumsikan tidak terjadi gesekan benda terhadap udara maka gerakan sebuah benda dengan hanya ditumpu pegas tanpa beban luar. Hal ini disebut getaran bebas SDOF.

Beberapa persamaan berikut digunakan untuk menurunkan persamaan getaran dengan metode energi, yaitu:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

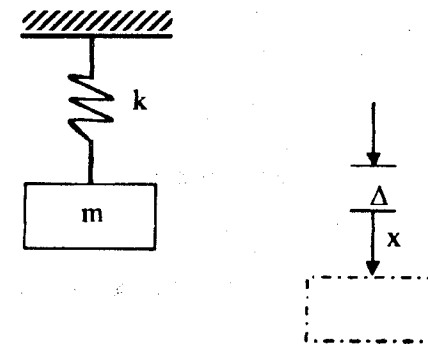
$$\omega_n = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Di mana  $\omega_n$  sebagai frekuensi pribadi (rad/det),  $f_n$  frekuensi pribadi (Hz=1/s), dan  $T$  adalah periode getaran.

Bila benda diberi simpangan dan kemudian dilepas maka benda tersebut akan bergetar pada frekuensi pribadinya sehingga dapat diketahui dari persamaan yang telah ditulis di atas. Bila massanya kecil dan kekakuannya besar maka frekuensi pribadinya besar. Demikian juga sebaliknya, bila massanya besar dan kekakuannya kecil maka frekuensi pribadinya juga kecil.

Hukum kekekalan energi menyatakan jumlah energi kinetik dan energi potensial adalah konstan sehingga  $T + U = \text{konstan}$  dan



Gambar 2.6b Sistem pegas massa tanpa redaman

$$\frac{d}{dt}(T + U) = 0$$

Pada Gambar 2.6(b), pegas dan massa mengalami simpangan sejauh ' $x$ '. Energi kinetik yang terjadi pada massa yang mengalami simpangan adalah:

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \text{ sedangkan energi potensial pegas } U = \frac{1}{2} kx^2.$$

$$\text{Jadi } T + U = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} kx^2, \text{ atau } T + U = C,$$

$$\frac{d}{dt}(T + U) = 0 = m\dot{x}\ddot{x} + kx\dot{x}$$

$$\text{Sehingga, } m\ddot{x} + kx = 0$$

Penurunan untuk mendapatkan persamaan getaran bebas tak teredam sederhana ini dapat dilakukan dengan penerapan hukum Newton kedua untuk gerak pada massa  $m$ , yaitu dengan persamaan berikut:

$$m \cdot x = \sum F \quad (\text{persamaan Newton-2})$$

$$m \cdot x = w - k \cdot (\Delta + x) \quad (\text{pernyataan } \sum F \text{ dalam bentuk 'usaha'})$$

$$= w - k \cdot \Delta - k \cdot x$$

karena  $k \cdot \Delta = w$  maka diperoleh persamaan  $m \cdot x = -k \cdot x$ . Model matematika persamaan getaran bebas tak teredam pada sistem satu derajat kebebasan dengan cara Newton juga diperoleh:

$$m \ddot{x} + kx = 0 \quad (2.6)$$

$m$  dan  $k$  merupakan koefisien tertentu sistem yang menyatakan masa dari lamp mass dan kekakuan pegas. ' $k$ ' adalah idealisasi dari kekakuan asumsi pegas yang menopang idealisasi massa ' $m$ ' dengan koefisien kekakuan tertentu dari sistem persamaan diferensial orde-2.

Solusi persamaan 2.6 dapat diperoleh dengan menyatakan solusi simpangan getaran sebagai *fungsi transien* yang umumnya diasumsikan sebagai *fungsi eksponensial*. Solusi asumsi ini diikuti sesuai tahapan, misal-nya dengan membuat turunan pertama dan kedua persamaan solusi diferensial, meskipun dengan konstanta. Turunan kedua fungsi yang masih mengandung konstanta tidak dalam bentuk angka, dimasukkan dalam persamaan 2.6. Jika *metode sistem ekuivalen* yang digunakan maka ' $m = m_{eq}$ ' dan ' $k = k_{ed}$ '. Asumsi solusi dari persamaan 2.5 merupakan pemisalan sederhana dengan fungsi eksponensial adalah sebagai berikut:

$$x(t) = Ce^{st} \quad (2.7)$$

Konstanta ' $C$  dan  $s$ ' adalah konstanta yang akan dicari dari persyaratan kondisi batas yang diberikan.

Substitusikan persamaan 2.7 ke persamaan 2.6, sehingga persamaan 2.6 menjadi:

$$C(ms^2 + k) = 0$$

Karena ' $C$ ' tidak boleh nol, maka persamaan 2.7 menjadi:

$$ms^2 + k = 0$$

$$\text{Hingga } s = \pm \left( -\frac{k}{m} \right)^{1/2} = \pm i\omega_n \quad (2.8)$$

Harga ' $s$ ' pada persamaan 2.8 harus merupakan bilangan riil sebagai syarat getaran terjadi. Syarat lain berhubungan dengan parameter frekuensi pribadi atau frekuensi natural dalam satuan radian/det dan frekuensi ini diperoleh dari persamaan berikut:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (2.9)$$

Syarat terjadinya getaran yang lain adalah harga frekuensi natural atau frekuensi pribadi harus positif dan hal ini mudah dipenuhi. Harga ' $s$ ' agar merupakan bilangan riil, agar kombinasi harga ' $m$  dan  $k$ ' harus sesuai.

Parameter lain dapat diturunkan dari frekuensi natural adalah:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_n} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (2.10)$$

Sehingga frekuensi natural dalam satuan sesuai pakar yang diberi kehormatan, yaitu Hz, menjadi:

$$f_n = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (2.11)$$

Dua nilai ' $s$ ' diperoleh dari persamaan 2.8 dan ' $s$ ' merupakan akar dari persamaan kuadrat. Persamaan ini dikenal sebagai *Persamaan Eigenvalue*. Bentuk solusi umum dari persamaan eigenvalue tersebut memperhatikan kemungkinan berlaku dan tidak, yang merupakan bilangan imajiner adalah:



$$x(t) = C_1 e^{i\omega_n t} + C_2 e^{-i\omega_n t} \quad (2.12)$$

Asumsi solusi persamaan 2.12 dinyatakan hanya dengan tujuan bahwa ekuivalensi persamaan ini (bentuk eksponensial) dapat disetarakan atau diganti dengan ekspresi lain, sebagai *persamaan trigoneometri*. Persamaan trigoneometri dengan sifat khas osilasi umum yang menyatakan simpangan getaran. Identitas kesamaan dengan trigonometri dengan menggunakan identitas sebagai berikut:

$$e^{\pm i\omega_n t} = \cos \omega_n t \pm i \sin \omega_n t \quad (2.13)$$

Maka persamaan 2.13 dapat ditulis kembali menjadi:

$$x(t) = A_1 \cos \omega_n t + A_2 \sin \omega_n t \quad (2.14)$$

di mana  $A_1$  dan  $A_2$  adalah konstanta baru. Konstanta  $C$  dan  $C$  atau  $A$  dan  $A$  dapat ditentukan dari kondisi awal sistem. Jika nilai dari displacement  $x(t)$  dan kecepatan  $\dot{x}(t) = (dx/dt)(t)$  dispesifikasikan menjadi  $x_0$  dan  $\dot{x}_0$  pada  $t = 0$ , maka persamaan 2.10 dengan kondisi awal adalah:

$$x(t=0) = A_1 = x_0 \quad (2.15)$$

$$\dot{x}(t=0) = \omega_n A_2 = \dot{x}_0$$

dengan mensubstitusikan persamaan 2.15 ke dalam persamaan 2.14, diperoleh:

$$x(t) = x_0 \cos \omega_n t + \frac{\dot{x}_0}{\omega_n} \sin \omega_n t \quad (2.16)$$

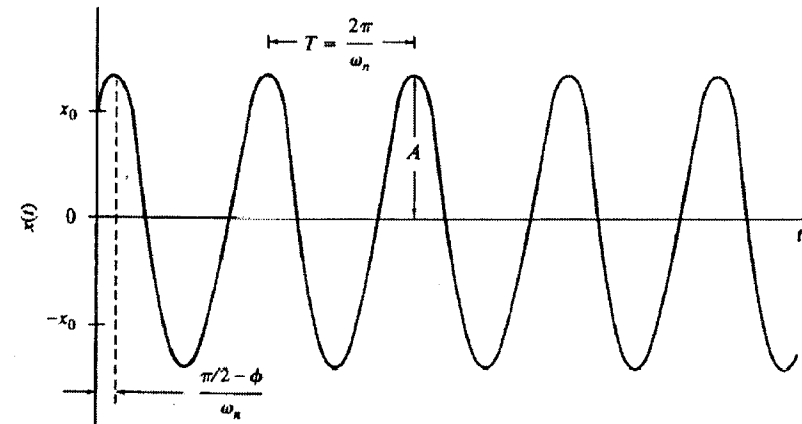
Persamaan 2.16 juga dikenal sebagai persamaan getaran harmonik fungsi waktu yang dapat disederhanakan menjadi:

$$x(t) = A(\sin \omega_n t + \phi) \quad (2.17)$$

$$\text{Dengan amplitudo } A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega_n}\right)^2} \quad (2.18)$$

$$\text{Dan beda phase } \phi = \tan^{-1} \left( \frac{\omega_n x_0}{\dot{x}_0} \right) \quad (2.19)$$

*Respons getaran* untuk sistem satu derajat kebebasan yang diwakili oleh persamaan 2.17 diplotkan seperti terlihat pada Gambar 2.6c.



Gambar 2.6c Respons getaran bebas SDOF

Namun biasanya persamaan diferensial getaran bebas tak teredam satu derajat kebebasan ini ditulis dengan mensubstitusikan persamaan 2.10 ke persamaan 2.5 sehingga bentuk sederhana menjadi:

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = 0 \quad (2.20)$$

### Contoh 2.3

Sebuah mesin dengan berat 500 kg diinstalasi di atas *fondasi elastis* yang memiliki konstanta pegas  $7 \times 10^5$  N/m. Tentukan frekuensi natural sistem tersebut.

### Solusi:

Sistem dimodelkan sebagai pegas-massa satu derajat kebebasan SDOF, dan frekuensi natural SDOF dihitung dengan persamaan 2.8, yaitu:

$$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{7 \times 10^5}{500}} = 5,96 \text{ Hz}$$

**Contoh 2.4**

Tentukan frekuensi natural dari gambar dibawah ini. Asumsikan massa pulley diabaikan dan getaran terjadi dengan tidak ada friksi!

**Jawab:**

Getaran pulley diasumsikan dengan tanpa gesekan dan massa pulley diabaikan. Tegangan tali menjadi konstan dan sama dengan berat  $W$  dari massa  $m$ . Gaya yang bekerja pada pulley-1 ke atas sebesar  $2W$  dan gaya yang bekerja pada pulley-2 ke bawah sebesar  $2W$ . Asumsikan jika titik pusat pulley-1 bergerak sejauh  $2W/k_1$  maka titik pusat pulley-2 bergerak sejauh  $2W/k_2$ . Sehingga total perpindahan massa  $m$  adalah:

$$2 \left( \frac{2W}{k_1} + \frac{2W}{k_2} \right).$$

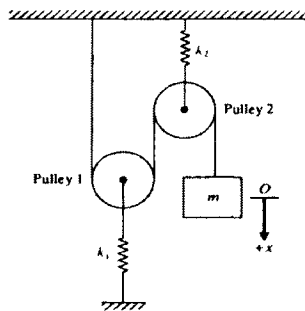
Jika  $k_{eq}$  menyatakan konstanta pegas ekuivalen sistem, maka:

$$\frac{W}{k_{eq}} = 4W \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right) = \frac{4W(k_1 + k_2)}{k_1 k_2}$$

$$k_{eq} = \frac{k_1 k_2}{4(k_1 + k_2)}$$

Persamaan getaran dengan *kekakuan ekuivalen* menjadi sebagai berikut:

$$m \ddot{x} + k_{eq} x = 0$$

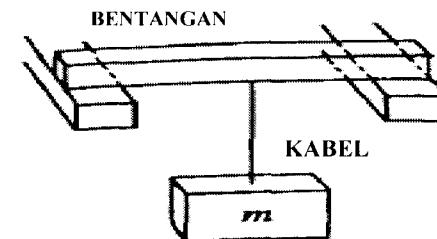


Maka frekuensi natural sistem dengan ' $\omega_n$  atau  $f_n$ ' adalah:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_{eq}}{m}} = \left[ \frac{k_1 k_2}{4m(k_1 + k_2)} \right]^{1/2} \text{ rad/sec}$$

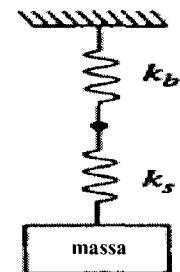
atau

$$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{1}{4\pi} \left[ \frac{k_1 k_2}{4m(k_1 + k_2)} \right]^{1/2} \text{ Hz}$$

**Contoh 2.5**

BENTANGAN :  $E = 200 \times 10^9 \text{ N/m}^2$   
 $I = 3.5 \times 10^{-4} \text{ m}^4$   
 KABEL :  $E = 200 \times 10^7 \text{ N/m}^2$   
 $r = 10 \text{ cm}$

(a)



(b)

Gambar 2.7a. Beban pada bentang hoist

Sebuah pabrik menggunakan mesin pengangkat dan pemindah barang tipe *hoist*. Hoist digantungkan pada sebuah batang sebagai *bentangan* yang dapat bergerak sepanjang lintasan. Beban diikatkan pada kabel. Idealisasi sifat pegas pada hoist diberlakukan untuk *beam* dan kabel yang dihubungkan seri. Model hoist seperti pada Gambar 2.7(a).

**Tentukan:**

Frekuensi natural sistem ketika hoist digunakan untuk mengangkat benda sebesar 800 kg dengan panjang tali 9 m.

**Jawab:**

Langkah pertama yang dilakukan adalah membuat asumsi agar persoalan ini dapat dijawab dengan menempatkan hoist di tengah bentangan batang. Konstanta kekakuan dapat ditentukan menjadi:

$$k_b = \frac{48EI}{L^3} = \frac{48(200 \times 10^9 \text{ N/m}^2)(3,5 \times 10^{-4} \text{ m}^4)}{(3,1 \text{ m})^3} = 1,13 \times 10^8 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

Konstanta kekakuan kabel menjadi:

$$k_c = \frac{AE}{L} = \frac{\pi(0,1 \text{ m})^2(200 \times 10^9 \text{ N/m}^2)}{9} = 6,98 \times 10^8 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

Dengan kondisi kekakuan bentangan dan kabel dipasang seri maka:

$$k_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{k_b} + \frac{1}{k_c}} = \frac{1}{\frac{1}{1,13 \times 10^8 \text{ N/m}} + \frac{1}{6,98 \times 10^8 \text{ N/m}}} = 9,73 \times 10^7 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

Jadi frekuensi natural sistem adalah:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_{eq}}{m}} = \sqrt{\frac{9,73 \times 10^7 \text{ N/m}}{800 \text{ kg}}} = 3,49 \times 10^2 \text{ rad/detik}$$

## 2.3 Getaran Bebas SDOF dengan Viscous Damping

Sebuah sistem getaran bebas dengan redaman viscous SDOF dinyatakan pada Gambar 2.7(b). Jika 'x' diukur dari posisi kesimbangan terhadap gerakan naik-turun massa 'm', maka dengan menggunakan hukum Newton-2 diperoleh persamaan umum getaran bebas teredam dengan redaman viscous untuk satu derajat kebebasan, yaitu:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = 0 \quad (2.21)$$

Seperti untuk solusi defleksi SDOF tanpa redaman, solusi persamaan getaran SDOF dengan peredam dapat diperoleh dengan asumsikan bentuk eksponensial yaitu:

$$x(t) = Ce^{st} \quad (2.7)$$

Dalam hal ini, C dan s adalah konstanta yang akan dicari. Substitusikan persamaan 2.7 ke dalam persamaan 2.21 sehingga persamaannya menjadi:

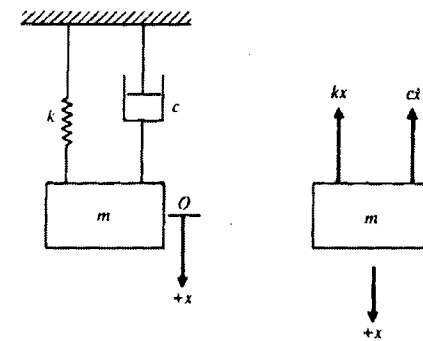
$$C(ms^2 + cs + k) = 0 \quad (2.22)$$

Karena 'C' tidak boleh berharga nol maka persamaan 2.22 menjadi:

$$ms^2 + cs + k = 0 \quad (2.23)$$

Persamaan 2.23 dikenal sebagai *persamaan karakteristik* dan persamaan ini mempunyai dua akar dari *rumus ABC*, yaitu:

$$s_{1,2} = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} \quad (2.24)$$



a. Sistem getaran

b. DBB

**Gambar 2.7b** Sistem pegas-massa redaman viscous

Dua akar dari persamaan karakteristik 2.24 adalah akar dari persamaan 2.21 yang dikenal sebagai *eigenvalue*. Bentuk solusi umum dari persamaan tersebut adalah:

$$x(t) = C_1 e^{s_1 t} + C_2 e^{s_2 t}$$

Substitusikan persamaan 2.24 pada persamaan 2.25 menghasilkan:

$$x(t) = C_1 e^{-\frac{c}{2m} + \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} t} + C_2 e^{-\frac{c}{2m} - \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} t} \quad (2.26)$$

$C_1$  dan  $C_2$  adalah konstanta yang dihitung dari kondisi awal  $x(0)$  dan  $dx/dt$  untuk  $t = 0$ . Solusi defleksi dengan mengasumsikan eksitasi berupa gaya sama dengan nol disebut sebagai *solusi transien* atau  $x_t(t)$ . Solusi defleksi dengan mempertimbangkan hubungan atau pengaruh  $F(t)$ , yaitu eksitasi dari variasi bentuk asumsi gaya akan dibahas pada Bab III. Solusi defleksi ini disebut solusi *Steady State* dengan notasi  $x_s(t)$ . Defleksi total merupakan penjumlahan dari  $x_t(t)$  dengan  $x_s(t)$ .

Solusi persamaan transien dalam bentuk lain dapat diberikan, yaitu:

$$x_t(t) = e^{-\zeta \omega_n t} (C_1 \cos \omega_d(t) + C_2 \sin \omega_d(t)) \quad (2/27)$$

Parameter evaluasi dari persamaan getaran berikut ini diperoleh dari Persamaan 2.27, yaitu:

#### 1. Redaman kritis dengan notasi, ' $c_c$ '

Selain frekuensi pribadi dengan notasi  $\omega_n$ , parameter baru yaitu redaman kritis  $c_c$  sebagai redaman maksimum yang memungkinkan sistem getaran masih dapat meredam gerakan, sehingga:

$$\left(\frac{c_c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m} = 0$$

$$\text{atau } c_c = 2m\sqrt{\frac{k}{m}} = 2m\omega_n \quad (2.28)$$

#### 2. Rasio Redaman

Rasio redaman dengan notasi  $\zeta$  didefinisikan sebagai perbandingan antara konstanta redaman terhadap konstanta redaman kritis, sehingga rasio redaman sama dengan:

$$\zeta = \frac{c}{c_c} \quad (2.29)$$

Substitusikan persamaan 2.28 ke persamaan 2.27 sehingga:

$$\frac{c}{2m} = \zeta \frac{c_c}{2m} = \zeta \omega_n$$

#### 3. Damping Frekuensi dengan notasi $\omega_d$

Damping frekuensi merupakan parameter sesuai hubungan berikut ini:

$$\omega_d = \omega_n \cdot (1 - \zeta^2)^{0.5} \quad (2.30)$$

#### 4. Rasio Frekuensi

Rasio frekuensi adalah perbandingan antara frekuensi redaman terhadap frekuensi pribadi, sesuai persamaan berikut:

$$\rho = \omega_d / \omega_n \quad (2.31)$$

Akar persamaan (2.24) sekarang dinyatakan dalam  $\zeta$  sehingga persamaan (2.24) menjadi:

$$S_{1,2} = \left(-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1}\right) \omega_n \quad (2.32)$$

Solusi defleksi dengan asumsi *fungsi eksponensial sederhana* untuk solusi transien (asumsi tanpa eksitasi gaya) dapat dinyatakan dalam tiga tipe. Ketiga solusi ini semuanya dapat diaplikasikan. Masing-masing solusi dinyatakan sebagai berikut:

$$x(t) = C_1 \cdot e^{\left(-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}\right) \omega_n t} + C_2 \cdot e^{\left(-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}\right) \omega_n t} \quad (2.33a)$$

$$x_t(t) = e^{-\zeta \omega_n t} (C_1 \cos \omega_d(t) + C_2 \sin \omega_d(t)) \quad (2.33b)$$

$$x(t) = C_1 \cdot e^{-\frac{c}{2m} + \sqrt{(c/2m)^2 - k/m}} + C_2 \cdot e^{-\frac{c}{2m} - \sqrt{(c/2m)^2 - k/m}} \quad (2.33c)$$

Konstanta  $C_1$  dan  $C_2$  diperoleh dari pengamatan atau asumsi pengamatan untuk dua kondisi di mana getaran terjadi. Asumsi untuk kedua konstanta ini tidak hanya untuk defleksi pada waktu tertentu, tetapi juga dapat dilakukan untuk percepatan dan kecepatan pada waktu yang ditentukan. Tentu saja asumsi untuk kecepatan dan percepatan berhubungan dengan kondisi turunan pertama atau turunan kedua dari salah satu persamaan 2.33(a) sampai persamaan 2.33(c) yang dipilih. Setelah kedua konstanta ini dapat ditentukan dari kondisi batas yang diberikan (asumsi atau memang pengamatan), maka plot Respons Dinamik SDOF (tampilan kurva percepatan, kecepatan, defleksi, gaya, atau  $a(t)$ ,  $v(t)$ ,  $x(t)$ ,  $f(t)$ , sebagai fungsi dari waktu) dari getaran bebas dapat dibuat.

*Evaluasi kinerja* getaran lamp mass terdiri dari dua bagian, yaitu evaluasi dari kurva respons dinamik, dan evaluasi dari kurva respons frekuensi ( $F(t) / x(t)$  sebagai fungsi dari  $\omega_d / \omega_n$ ). Respons frekuensi dibahas pada kondisi getaran dengan penerapan eksitasi. Eksitasi berupa gaya dan perpindahan ini dapat bekerja pada setiap asumsi pemodelan

lamp mass. Akar karakteristik ' $s_1$  dan  $s_2$ ' adalah akar alami dari persamaan 2.30, sehingga perilaku dari solusi persamaan 2.30 tergantung pada besaran redaman.

Tiga kasus kondisi respons getaran benda terhadap beban luar yang diberikan sebagai beban kejut dari tiga harga ' $\zeta$ '. Kasus ini dinyatakan dalam nomor '5', '6', dan nomor '7', berikut ini:

#### 5. Under Damped

*Under dumping* atau kondisi teredam Getaran adalah kondisi osilasi atau gerakan getaran benda dengan sistem getaran yang ada mampu meredam getaran tersebut sampai berhenti. Ideal waktu berhenti adalah tak berhingga. Kondisi ini dicapai dengan syarat  $\zeta < 1.0$ . Untuk kasus ini, ' $(\zeta^2 - 1)$ ' menjadi negatif dan akar persamaan karakteristik menjadi sebagai berikut:

$$S_{1,2} = \left( -\zeta \pm i\sqrt{1-\zeta^2} \right) \omega_n \quad (2.34)$$

Jika akar persamaan ini dimasukkan ke persamaan 2.30 maka menjadi:

$$x(t) = C_1 \cdot e^{(-\zeta + i\sqrt{1-\zeta^2})\omega_n t} + C_2 \cdot e^{(-\zeta - i\sqrt{1-\zeta^2})\omega_n t}$$

Persamaan ini sama dengan persamaan 2.33(a).

Persamaan di atas juga dapat ditulis seperti salah satu dari kedua bentuk berikut:

$$\begin{aligned} x(t) &= A \cdot e^{-\zeta \omega_n t} \sin(\sqrt{1-\zeta^2} \omega_n t + \phi) \\ &= e^{-\zeta \omega_n t} \left( C_1 \sin \sqrt{1-\zeta^2} \omega_n t + C_2 \cos \sqrt{1-\zeta^2} \omega_n t \right) \end{aligned}$$

Persamaan ini sama dengan persamaan 2.33(b).

Konstanta ' $C_1$  dan  $C_2$ ' ditentukan dari Initial Condition atau *kondisi awal* misalnya,  $t = 0$ ,  $x(0)$  dan  $dx/dt = \dot{x}_0$ . Persamaan 2.33(b) menjadi:

$$x(t) = e^{-\zeta \omega_n t} \left( \frac{x(0) + \zeta \omega_n x_0}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} \sin \sqrt{1-\zeta^2} \omega_n t + x_0 \cos \sqrt{1-\zeta^2} \omega_n t \right) \quad (2.35)$$

Persamaan ini menunjukkan bahwa frekuensi getaran teredam adalah sama dengan:

$$\omega_d = \frac{2\pi}{T_d} = \omega_n \sqrt{1-\zeta^2} \quad (2.36)$$

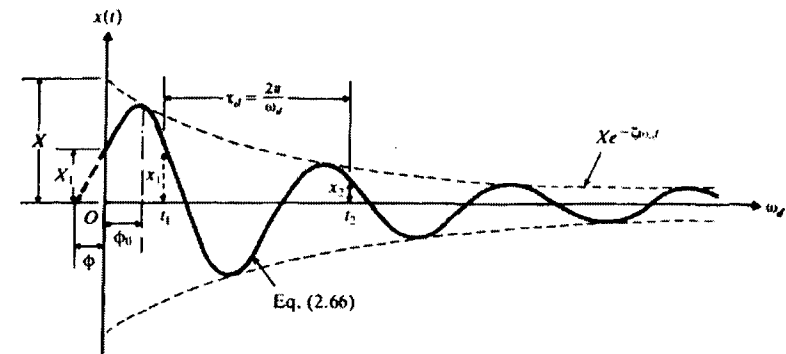
Solusi alternatif dari persamaan 2.34 adalah:

$$x(t) = A e^{-\zeta \omega_n t} \sin(\omega_d t + \phi_d) \quad (2.37)$$

$$\text{dengan, } A = \sqrt{x_0^2 + \left( \frac{x_0 + \zeta \omega_n x_0}{\omega_d} \right)^2} \quad (2.38)$$

$$\text{dan, } \phi_d = \tan^{-1} \left( \frac{x_0 \omega_d}{x_0 + \zeta \omega_n x_0} \right) \quad (2.39)$$

Getaran yang digambarkan oleh persamaan 2.35 adalah gerakan harmonik dari frekuensi getaran teredam  $\omega_d$ , tetapi dengan adanya faktor  $e^{-\zeta \omega_n t}$ . Amplitudo gerakan harmonik menjadi semakin mengecil secara eksponensial terhadap waktu, sesuai Gambar 2.8.



Gambar 2.8 Getaran teredam  $\zeta < 1,0$

Untuk kasus gerak berosilasi *under damped*, amplitudo osilasi mengalami penurunan secara logaritmik  $\delta$ . Dan ' $\delta$ ' didefinisikan sebagai perbandingan amplitudo getaran satu dengan getaran berikutnya secara berurutan yang dapat diekspresikan menjadi sebagai berikut:

$$\delta = \ln \left( \frac{x(t)}{x(t+T_d)} \right) = \ln \left( \frac{Ae^{-\zeta \omega_n t} \sin(\omega_d t + \phi_d)}{Ae^{-\zeta \omega_n (t+T_d)} \sin[\omega_d (t+T_d) + \phi_d]} \right)$$

$$\delta = \zeta \omega_n T_d = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \text{ untuk } \zeta \ll 1, \text{ maka } \delta = 2\pi\zeta \quad (2.40)$$

Secara riil *penurunan logaritmik* ' $\delta$ ' ini diperoleh dari hasil pengukuran dengan alat ukur osiloskop, dan *damping ratio riil* dapat dihitung dengan persamaan berikut:

$$\zeta = \frac{\delta}{\sqrt{4\pi^2 + \delta^2}} \quad (2.41)$$

Data riil kecepatan  $\dot{x}(t)$  dengan ' $\dot{x}$  dot atau  $dx/dt$ ' dan data percepatan dari  $\ddot{x}(t)$  dengan ' $\ddot{x}$  double dot atau  $dx^2/dt^2$ ' juga dapat digunakan untuk menghitung penurunan logaritmik  $\delta$ , yaitu dengan persamaan berikut:

$$\delta = \ln \left( \frac{\dot{x}(t)}{\dot{x}(t+T_d)} \right) \quad (2.42)$$

$$\delta = \ln \left( \frac{\ddot{x}(t)}{\ddot{x}(t+T_d)} \right) \quad (2.43)$$

#### 6. Critical Damped

*Critical Damped* atau Redaman Kritis adalah kondisi getaran bebas dengan harga  $\zeta = 1,0$ . Untuk kasus ini, dua akar persamaan memiliki harga sama, sehingga karakteristik menjadi sebagai berikut:

$$S_1 = S_2 = -\frac{c_c}{2m} = -\omega_n \quad (2.44)$$

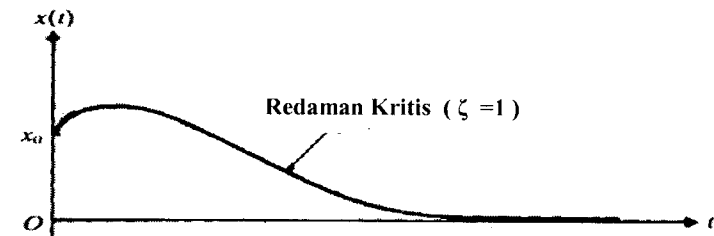
Karena akar persamaan karakteristik getaran ini dengan harga sama, maka persamaan umum getaran disederhanakan menjadi:

$$x(t) = (C_1 + C_2 t) \cdot e^{-\omega_n t} \quad (2.45)$$

Kondisi awal,  $t = 0$  dengan  $x_0$  dan  $\dot{x}_0$ , maka persamaan 2.38 menjadi:

$$x(t) = \left[ x_0 + \left( \dot{x}_0 + \omega_n x_0 \right) t \right] e^{-\omega_n t} \quad (2.46)$$

Terlihat jelas bahwa persamaan 2.43 adalah tidak periodik, karena untuk  $e^{-\omega_n t} \rightarrow 0$  pada  $t \rightarrow \infty$ . Getaran kondisi dengan gerakan menuju nol dapat diamati pada Gambar 2.9(a).

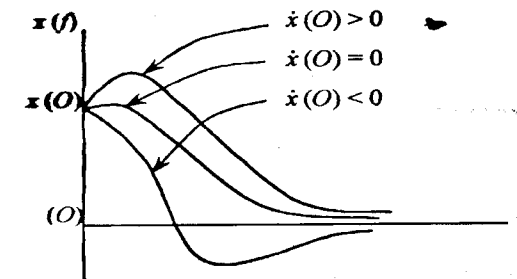


Gambar 2.9a Getaran dengan redaman kritis  $\zeta = 1,0$

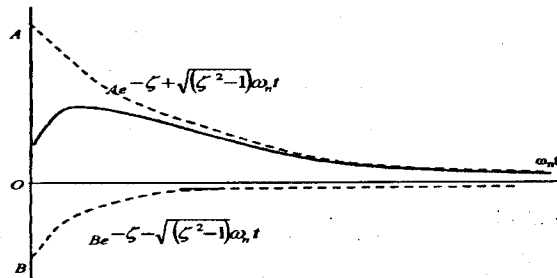
Lebih jauh, dengan memperhatikan pola variasi kecepatan dari solusi untuk mendapatkan persamaan respons dengan mengambil harga  $\zeta = 1$  dan dengan memasukkan kondisi awal  $x(0)$  dan  $\dot{x}(0)$ , maka didapatkan:

$$x = e^{-\omega_n t} \{ [\dot{x}(0) + \omega_n x(0)] t + x(0) \}$$

Gambar 2.9(b) menunjukkan tiga kemungkinan jenis respons dengan simpangan awal  $x(0)$ .



Gambar 2.9b Redaman kritis  $\zeta = 1,0$  dengan variasi kecepatan

Gambar 2.9c Simpangan aperiodik dengan  $\zeta > 1,0$ 

## 7. Over Damped

Over damped atau *redaman berlebih* merupakan kondisi benda masif atau taj bergerak atau tak berosilasi karena  $\zeta > 1,0$ . Untuk kasus ini dengan  $(\zeta^2 - 1)$ ,  $S_1$  dan  $S_2$  berharga positif dan akar persamaan karakteristik kondisi over damped adalah:

$$S_1 = (-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}) \omega_n \dots\dots \text{ dan}$$

$$S_2 = (-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}) \omega_n \quad (2.47)$$

Jika akar persamaan ini digunakan pada persamaan 2.26 maka hasilnya adalah:

$$x(t) = C_1 e^{(-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}) \omega_n t} + C_2 e^{(-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}) \omega_n t} \quad (2.48)$$

Dengan kondisi awal  $x(0) = x_0$  dan  $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$ , maka  $C_1$  dan  $C_2$  pada persamaan 2.48 menjadi:

$$C_1 = \frac{x_0 \omega_n (\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}) + \dot{x}_0}{2 \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}} \quad (2.49)$$

$$C_2 = \frac{-x_0 \omega_n (\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}) - \dot{x}_0}{2 \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}} \quad (2.50)$$

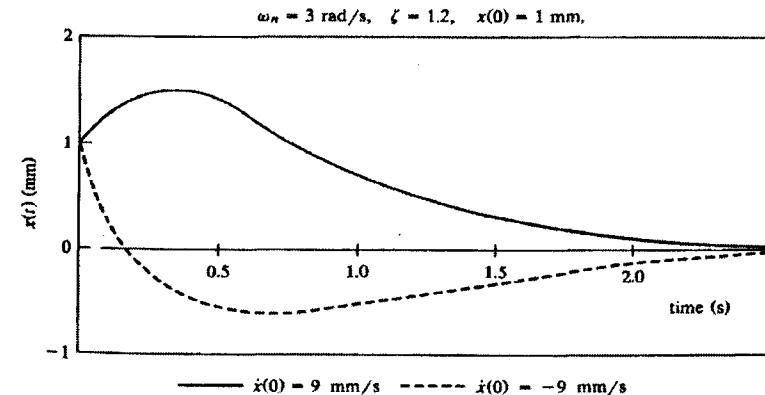
Jika persamaan 2.49 dan persamaan 2.50 dimasukkan ke dalam persamaan 2.48, diperoleh persamaan getaran tak berosilasi (*overdamped*) berikut ini:

$$x(t) = \frac{e^{-\zeta \omega_n t}}{2 \sqrt{\zeta^2 - 1}} \left\{ \left[ \frac{\dot{x}_0}{\omega_n} + x_0 (\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}) \right] e^{\omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1} t} + \left[ -\frac{\dot{x}_0}{\omega_n} + x_0 (-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}) \right] e^{-\omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1} t} \right\} \quad (2.51a)$$

$$B = \frac{-\dot{x}(0) - (\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}) \omega_n x(0)}{2 \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}}$$

Gerak ini merupakan fungsi yang menurun secara eksponensial terhadap waktu seperti terlihat pada Gambar 2.9(c). dan disebut *aperiodik*.

Persamaan 2.51(a) dan 2.51(b) menjelaskan persamaan aperiodik, yang berarti tidak mengalami siklus walaupun hanya untuk satu periode. Contoh pada Gambar 2.10(a) merupakan kondisi overdamped untuk kasus  $x(0) = 1 \text{ mm}$ , damping ratio  $\zeta = 1,2$  dan  $\omega_n = 3 \text{ rad/detik}$ .



Gambar 2.10a Respons getaran bebas SDOF

Amplitudo maksimum terjadi di  $t = 0$  dan itu dapat dilakukan dengan memasukkannya pada persamaan di bawah ini sehingga untuk amplitudonya diperoleh:

$$t = -\frac{1}{2\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}} \ln \left\{ \frac{\zeta - \left( \zeta + \sqrt{\zeta^2-1} \right) \frac{x_0}{\omega_n} + x_0 \left( \zeta + \sqrt{\zeta^2-1} \right)}{\zeta + \left( \zeta + \sqrt{\zeta^2-1} \right) \frac{x_0}{\omega_n} + x_0 \left( \zeta - \sqrt{\zeta^2-1} \right)} \right\} \quad (2.51b)$$

Cara sederhana untuk menentukan jumlah redaman yang ada dalam suatu sistem adalah dengan mengukur laju perubahan osilasi bebas. Makin besar redaman, semakin besar pula laju peluruhannya (pengurangannya). Perhatikan getaran teredam yang dinyatakan oleh persamaan umum 2.35 dalam bentuk lain, yaitu:

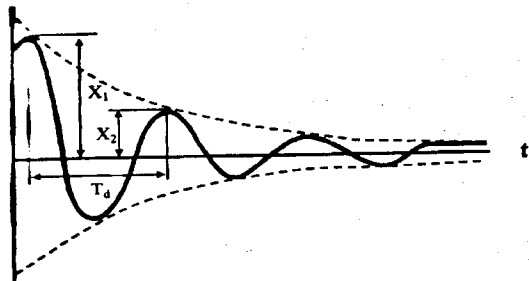
$$x = X e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t + \phi)$$

Persamaan ini dapat dijabarkan menggunakan grafik seperti pada Gambar 2.10(b). Dari gambar, istilah pengurangan logaritmik atau *logarithmic decrement* didefinisikan sebagai logaritma natural dari rasio dua amplitudo berurutan. Rumusnya adalah sebagai berikut:

$$\delta = \ln \frac{x_1}{x_2} = \ln \frac{e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t_1 + \phi)}{e^{-\zeta\omega_n(t_1+\tau_d)} \sin(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n(t_1+\tau_d) + \phi)} \quad (2.52a)$$

dan karena nilai sinusnya adalah sama bila waktu ditambah periode redaman  $\tau_d$ , maka hubungan persamaan 2.52(a) menjadi:

$$\delta = \ln \frac{e^{-\zeta\omega_n t_1}}{e^{-\zeta\omega_n(t_1+\tau_d)}} = \ln e^{\zeta\omega_n \tau_d} = \zeta\omega_n \tau_d \quad (2.52b)$$



Gambar 2.10b Laju Pengurangan Osilasi

Dengan mensubstitusikan periode redaman berikut ini:

$$\tau_d = \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}},$$

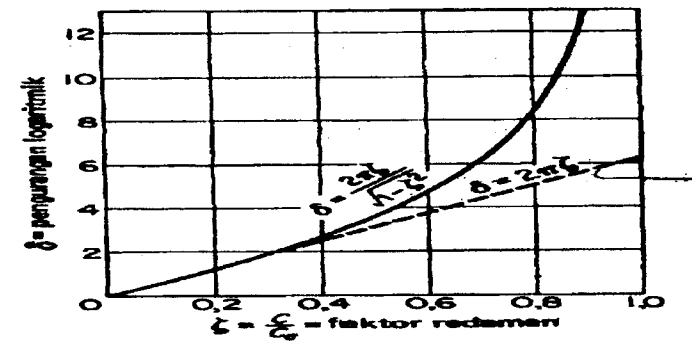
maka pengurangan logaritmik di atas menjadi:

$$\delta = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

sebagai persamaan eksak. Bila harga  $\zeta$  kecil,  $\sqrt{1-\zeta^2} \cong 1$ , diperoleh:

$$\delta = 2\pi\zeta$$

Gambar 2.10(c) menunjukkan diagram nilai  $\zeta$  yang eksak maupun pendekatannya sebagai fungsi  $\zeta$ .



Gambar 2.10c Penurunan Logaritmik Sebagai Fungsi- $\zeta$

#### Contoh 2.6(a)

Data ini diberikan untuk sistem getaran dengan redaman karena kekentalan: fluida  $w = 10$  lb,  $k = 30$  lb/in, dan  $c = 0,12$  lb/in per sekon. Tentukan pengurangan logaritmik dan rasio pengurangan dua amplitudo yang berurutan!



**Jawab:**

Frekuensi natural sistem tanpa redaman ini adalah:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{30 \times 386}{10}} = 34,0 \text{ rad / sec}$$

Koefisien redaman kritis  $c_c$  dan faktor redaman  $\zeta$  adalah:

$$c_c = 2m\omega_n = 2 \times \frac{10}{386} \times 34,0 = 1,76 \text{ lb/in. per sec.}$$

$$\zeta = \frac{c}{c_c} = \frac{0,12}{1,76} = 0,0681 \text{ dan } \delta = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{2\pi \times 0,0681}{\sqrt{1-0,0681^2}} = 0,429$$

Rasio amplitudo untuk tiap dua siklus yang berurutan adalah:

$$\frac{x_1}{x_2} = e^\delta = e^{0,429} = 1,54$$

**Contoh 2.6(b)**

Pengurangan logaritma diberikan oleh persamaan berikut:

$$\delta = \frac{1}{n} \ln \frac{x_0}{x_n}$$

dengan  $x_n$  menyatakan amplitudo setelah  $n$  siklus berlangsung. Gambarkanlah suatu kurva yang menunjukkan jumlah siklus yang telah berlangsung terhadap  $\zeta$  agar amplitudonya berkurang 50 persen!

**Jawab:**

Rasio amplitudo untuk tiap dua amplitudo yang berurutan adalah:

$$\frac{x_0}{x_1} = \frac{x_1}{x_2} = \frac{x_2}{x_3} = \dots = \frac{x_{n-1}}{x_n} = e^\delta$$

Rasio  $x_0/x_n$  dapat ditulis sebagai:

$$\frac{x_0}{x_n} = \left( \frac{x_0}{x_1} \right) \left( \frac{x_1}{x_2} \right) \left( \frac{x_2}{x_3} \right) \dots \left( \frac{x_{n-1}}{x_n} \right) = (e^\delta)^n = e^{n\delta}$$

Dari sini persamaan yang dibutuhkan diperoleh, yaitu:

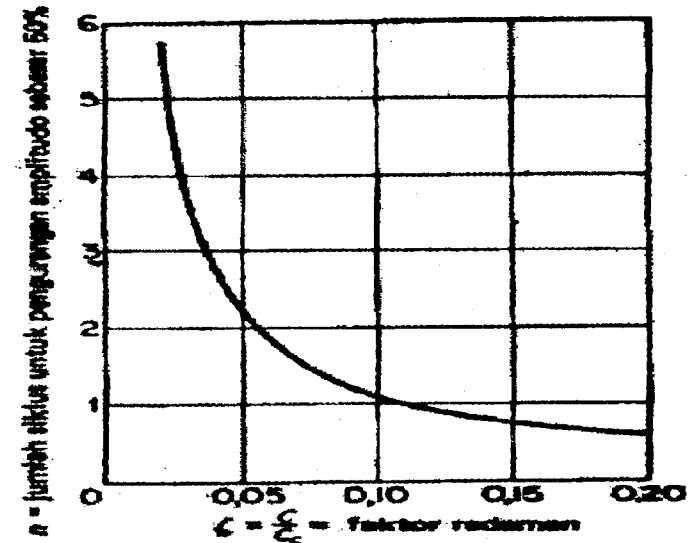
$$\delta = \frac{1}{n} \ln \frac{x_0}{x_n}$$

Untuk menentukan jumlah siklus yang harus berlangsung agar amplitudo berkurang sampai dengan nol persen, hubungan berikut dituliskan dari persamaan sebelumnya yaitu:

$$\delta \cong 2\pi\delta = \frac{1}{n} \ln 2 = \frac{0,693}{n}$$

$$n\zeta = \frac{0,693}{2\pi} = 0,110$$

Persamaan terakhir merupakan persamaan hiperbola siku-siku dan digambarkan seperti Gambar 2.10(d).



Gambar 2.10d Penurunan Logaritmik dengan  $\delta = \frac{1}{n} \ln \frac{x_0}{x_n}$

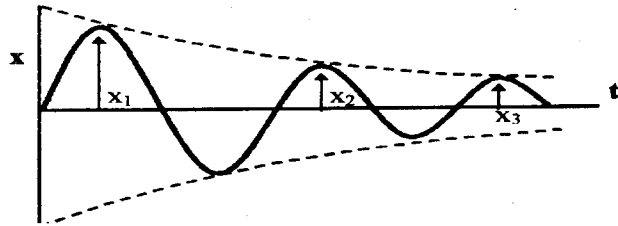
**Contoh 2.6(c)**

Untuk redaman kecil, tunjukkan bahwa penurunan logaritmik dapat dinyatakan dalam energi getaran '  $U$  ' dan energi yang didisipasi (disebar) per siklus  $\Delta U$ .

**Jawab:**

Gambar 2.10(e). menunjukkan getaran teredam dengan amplitudo ber-urutan  $x_1, x_2, x_3, \dots$ . Dari definisi penurunan logaritmik  $\delta = \ln x_1 / x_2$ , rasio amplitudo dapat ditulis dalam bentuk eksponensial dari deret sebagai berikut:

$$\frac{x_2}{x_1} = e^{-\delta} = 1 - \delta + \frac{\delta^2}{2!} - \dots$$



**Gambar 2.10e** Laju pengurangan osilasi redaman kecil

Energi getaran sistem merupakan energi yang tersimpan dalam pegas pada simpangan maksimum, atau:

$$U_1 = \frac{1}{2} kx_1^2, \quad U_2 = \frac{1}{2} kx_2^2$$

Pengurangan energi dinyatakan sebagai energi sesudahnya dibagi dengan energi mula-mula menjadi:

$$\frac{U_1 - U_2}{U_1} = 1 - \frac{U_2}{U_1} = 1 - \left( \frac{x_2}{x_1} \right)^2 = 1 - e^{-2\delta} = 2\delta - \frac{(2\delta)^2}{2!} + \dots$$

Untuk  $\delta$  kecil diperoleh hubungan sebagai berikut:

$$\frac{\Delta U}{U} = 2\delta$$

**Contoh 2.7**

Sebuah *Underdamped Shock Absorber* didesain untuk sebuah sepeda motor dengan massa 200 kg seperti dinyatakan pada Gambar 2.11(a). Ketika shock absorber mendapatkan kecepatan awal akibat adanya gundukan di jalan, grafik hasil displacement sebagai plot fungsi terhadap waktu dicantumkan pada Gambar 2.11(b).

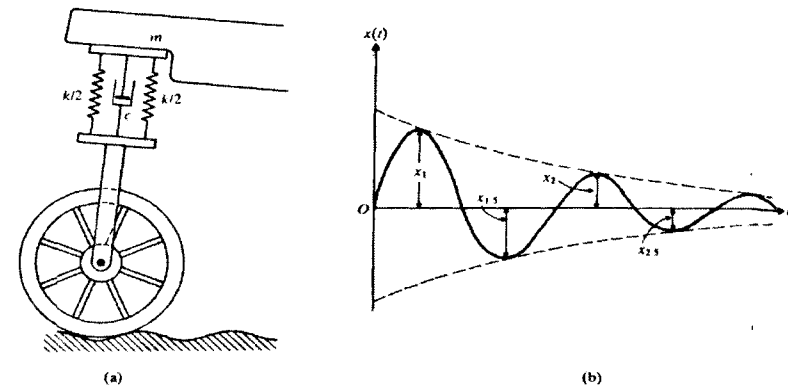
Tentukan besar konstanta pegas dan redaman dari shock absorber jika periode redaman getaran adalah 2 detik dan amplitudo  $x_1$  tereduksi menjadi  $1/4$ -nya pada kondisi untuk  $1/2$  periode berikutnya. Dengan pernyataan lain,  $x_{1.5} = x_1/4$ . Tentukan juga kecepatan awal minimum yang menyebabkan displacement maksimum atau kondisi amplitudo maksimum sebesar 250 mm.

**Diketahui:**

Massa = 200 kg, kurva displacement terlihat pada Gambar 2.8 (b), periode redaman ( $T_d$ ) = 2 detik, amplitudo maksimum ( $A$ ) = 250 mm, model matematika  $x_{1.5} = x_1/4$ .

**Tentukan:**

Konstanta pegas ( $k$ ), konstantan redaman ( $c$ ), dan kecepatan awal yang menghasilkan amplitudo maksimum 250 mm.



**Gambar 2.11** Sket respons getaran SDOF

**Jawab:**

Penurunan logaritmik sistem adalah:

$$\delta = \ln \left( \frac{x(t)}{x(t+T_d)} \right) = \ln \left( \frac{x_1}{x_2} \right) = \ln(16) = 2,7726 = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

Dari persamaan di atas diperoleh damping rasio  $\zeta = 0,4037$ .

Jika periode redaman getaran diketahui dengan persamaan 2.32 maka

diperoleh: 
$$\omega_n = \frac{2\pi}{T_d \sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{2\pi}{2\sqrt{1-(0,4037)^2}} = 3,4338 \text{ rad/s}$$

Konstanta pegas sistem diperoleh dari persamaan 2.6, yaitu:

$$k = m\omega_n^2 = (200)(3,4338)^2 = 2358,2652 \text{ N/m}$$

Konstantan redaman kritis ( $c_c$ ) diperoleh dari persamaan 2.23, yaitu:

$$c_c = 2m\sqrt{\frac{k}{m}} = 2m\omega_n = 2(200)(3,4338) = 1373,54 \text{ N.s/m}$$

Konstanta redaman sistem ( $c$ ) diperoleh dari persamaan 2.24, yaitu:

$$c = \zeta c_c = (0,4037)(1373,54) = 554,4981 \text{ N.s/m}$$

Jika diketahui displacement dari massa maksimum terjadi pada  $t_1$ . Hal ini diperoleh dari persamaan berikut:

$$\sin \omega_d t_1 = \sqrt{1-\zeta^2}$$

$$\sin \omega_d t_1 \approx \sin \pi t_1 = \sqrt{1-(0,4037)^2} = 0,9149$$

$$t_1 \approx \frac{\sin^{-1}(0,9149)}{\pi} \approx 0,3678 \text{ s}$$

Persamaan perpindahan yang melintasi titik tengah atau posisi netral getaran, yaitu:

$$x(t) = Ae^{-\zeta\omega_n t} \sin \omega_d t = Ae^{-\zeta\omega_n t} \sqrt{1-\zeta^2}$$

Displacement maksimumnya sesuai persyaratan adalah 250 mm. Persamaan getaran dengan menyertakan semua parameter dan konstanta yang sudah dihitung sebelumnya untuk waktu 't', menjadi:

$$0,25 = Ae^{-(0,4037)(3,4338)(0,3678)} \sqrt{1-(0,4037)^2}$$

Amplitudo maksimum dari identitas diatas adalah:

$$A = 0,455 \text{ m}$$

Persamaan kecepatan diperoleh dengan menurunkan persamaan berikut ini:

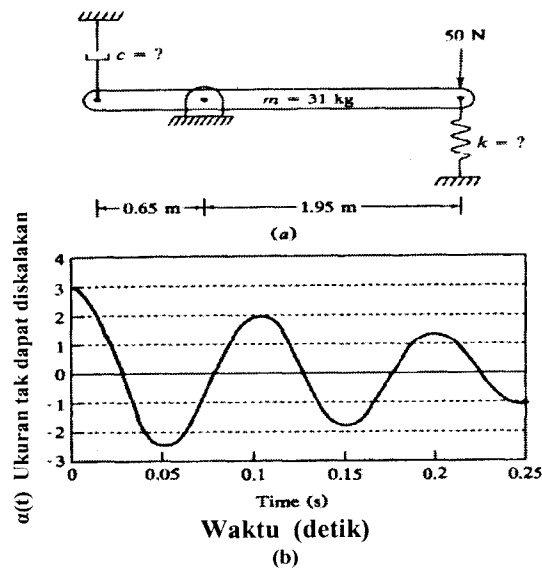
$$\dot{x}(t) = Ae^{-\zeta\omega_n t} (-\zeta\omega_n \sin \omega_d t + \omega_d \cos \omega_d t)$$

Kecepatan awal  $\dot{x}(t=0) = \dot{x}_0$  saat amplitudo maksimumnya adalah:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t=0) &= \dot{x}_0 = A\omega_d = A\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}, \text{ atau dengan numerik menjadi,} \\ &= 1.4294 \text{ m/detik} \end{aligned}$$

**Contoh 2.8**

Sebuah batang slender memiliki massa 31 kg dan panjang 2.6 m Gambar 2.12(a). Gaya statik sebesar 50 N dikenakan pada ujung kanan batang di P sampai batang bergerak. Osilasi pada ujung kanan dimonitor dengan sebuah osiloscope dan alat ini menyediakan data percepatan seperti terlihat pada Gambar 2.12(b). Skala data 'waktu' kondisi sudah dikalibrasi, tetapi data percepatan tidak dikalibrasi. Gunakan data yang ada untuk menentukan konstanta pegas dan redaman! Juga tentukan kalibrasi skala untuk percepatan!



Gambar 2.12 Sket dan respons getaran Soal 2.2

**Jawab:**

Solusi persamaan getaran dari permasalahan di atas adalah:

$$\ddot{x} + \frac{3c}{7m} \dot{x} + \frac{27k}{7m} x = 0$$

Frekuensi natural dari sistem adalah:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{27k}{7m}} \quad \text{dan} \quad \zeta = \frac{3c}{14m\omega_n}$$

Dengan menggunakan data yang diketahui dari osiloskop, periode redaman dari getaran bebas diperoleh 0.1 detik. Nilai pengurangan logaritmik ditentukan dari data osiloskop dan dengan persamaan 2.40, menjadi berikut:

$$\delta = \ln \left( \frac{\ddot{x}(0)}{\ddot{x}(0,1 \text{ s})} \right) = \ln \left( \frac{3}{2} \right) = 0,405$$

Rasio redaman dihitung dengan persamaan 2.41.

$$\zeta = \frac{0,405}{\sqrt{4\pi^2 + (0,405)^2}} = 0,0643$$

Damping Frekuensi dan Frekuensi Natural menjadi:

$$\omega_d = \frac{2\pi}{T_d} = \frac{2\pi}{(0,1 \text{ s})} = 62,83 \text{ rad/s}$$

$$\omega_n = \frac{\omega_d}{\sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{62,83}{\sqrt{1-0,0643}} = 62,96 \text{ rad/s}$$

Nilai konstanta pegas 'k' dan konstanta redaman 'c' diperoleh berikut ini:

$$k = \frac{7m\omega_n^2}{27} = \frac{7(31)(62,96)}{27} = 3,19 \times 10^4 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

$$c = \frac{14m\omega_n\zeta}{3} = \frac{14(31)(62,96)(0,0643)}{3} = 585,7 \frac{\text{N.s}}{\text{m}}$$

Kalibrasi percepatan diperoleh dari analisis keseimbangan statik posisi awal pada ujung kanan untuk  $t=0$ , maka posisi tersebut menjadi sebagai berikut:

$$x(0) = \frac{F}{k} = \frac{50 \text{ N}}{3,19 \times 10^4 \text{ N/m}} = 1,6 \text{ mm}$$

Percepatan awal dihitung dari persamaan diferensial yang terbentuk, juga untuk  $t=0$  yaitu:

$$\begin{aligned} \ddot{x}(0) &= -\frac{3c}{7m} \dot{x}(0) - \frac{27k}{7m} x(0) = \\ &= -\frac{27(3,19 \times 10^4 \text{ N/m})}{7(31 \text{ kg})} (0,0016 \text{ m}) = -6,35 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \end{aligned}$$

Sehingga skala kalibrasi menjadi sama dengan:

$$1 \text{ unit} = \frac{6,35 \text{ m/s}^2}{3} = 2,12 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

## 2.4 Getaran Bebas SDOF Coulomb Damping

*Coulomb damping* adalah asumsi sifat redaman dari kelakuan dari koneksi atau hubungan benda lamp mass yang terjadi akibat benda itu bergesekan dengan permukaan kering atau permukaan yang bersifat *dry friction* dari dua permukaan yang memiliki sifat sliding, yaitu meluncur satu dengan yang lain. Contoh permukaan asumsi Coulomb damping adalah *axle friction* atau Landasan Luncur dengan tumpuan journal bearing, dan *belt friction* dengan Landasan Rolling. Apapun kondisi ril Landasan Luncur atau Landasan Rolling, kedua landasan ini dimodelkan sama, yaitu model 'redaman'. Di sini kita akan membahas massa sliding pada permukaan kering sebagai bahan analisis. Namun hasilnya secara kualitatif dapat digunakan pada semua bentuk coulomb damping. Dengan mengikuti asumsi massa slide pada permukaan kering, seperti tercantum pada Gambar 2.13, gaya gesek yang menahan gerakan antara massa dan permukaan dapat ditentukan.

Coulomb menyatakan bahwa gaya gesek yang timbul, mempunyai harga sebanding dengan gaya normal yang timbul antara massa dan permukaan dari bidang gesek. Konstanta yang berfungsi sebagai penyeimbang tersebut adalah koefisien gesekan kinetik dengan notasi ' $\mu$ .' Karena gaya gesek selalu menahan gerakan yang terjadi, maka arahnya berlawanan arah kecepatan pergerakan benda. Penerapan prinsip Coulomb penting untuk mengetahui jumlah siklus tertentu dari getaran bebas SDOF dengan kondisi massa dan parameter pegas-damper tertentu. Tujuan pembuatan model getaran ini dibuat sejalan dengan asumsi gesekan pada permukaan getaran sebagai yang menghentikan gerakan.

Aplikasikan hukum Newton untuk diagram free body pada Gambar 2.13(b) menghasilkan persamaan diferensial sebagai berikut:

$$m\ddot{x} + kx = -\mu mg \quad \dot{x} > 0 \quad (2.53a)$$

$$m\ddot{x} + kx = \mu mg \quad \dot{x} < 0 \quad (2.53b)$$

Asumsikan sistem satu derajat kebebasan dengan getaran bebas seperti pada Gambar 2.13 dengan kondisi awal massa berpindah sejauh ' $\delta$ ' ke kanan. Gaya pegas mendorong massa ke titik keseimbangan dengan arah kecepatan negatif. Persamaan 2.53(b) diterapkan pada setengah siklus pertama dari gerakan sampai kecepatannya menjadi nol, kemudian persamaan 2.53(a) diberlakukan untuk siklus selanjutnya. Pembahasan berikut ini diawali dari persamaan 2.53(a).

Persamaan 2.53(a) digunakan untuk persamaan gerak pada kondisi sampai tanda arah kecepatan berubah atau kecepatan menjadi sama dengan nol. Solusi dari persamaan 2.53(a) menggunakan persamaan 2.55 dan kecepatan sama dengan nol atau  $\dot{x}\left(\frac{\pi}{\omega_n}\right) = 0$  digunakan sebagai kondisi awal, sehingga diperoleh:

$$x(t) = \left(\delta - \frac{3\mu mg}{k}\right) \cos \omega_n t - \frac{\mu mg}{k} \quad \frac{\pi}{\omega_n} \leq t \leq \frac{2\pi}{\omega_n} \quad (2.54)$$

Kecepatan kembali berubah tanda pada  $t = 2\pi/\omega_n$  sehingga defleksi yang terjadi sesuai dengan hubungan berikut ini:

$$x\left(\frac{\pi}{\omega_n}\right) = \delta - \frac{4\mu mg}{k} \quad (2.55)$$

Solusi dari persamaan 2.53(b) berhubungan dengan parameter awal  $x(0) = \delta$  dan  $\dot{x}(0) = 0$  adalah sebagai berikut:

$$x(t) = \left(\delta - \frac{\mu mg}{k}\right) \cos \omega_n t + \frac{\mu mg}{k} \quad (2.56)$$

Perhatikan tanda '+' pada persamaan 2.56 dan tanda '-' pada persamaan sebelumnya. Persamaan 2.54 menggambarkan gerakan sampai kecepatan berubah tanda atau dengan kata lain terjadi kecepatan sama dengan nol, yaitu pada  $t = \pi/\omega_n$ . Kondisi tersebut terjadi dengan defleksi sama dengan:

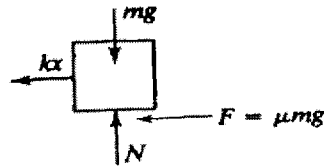
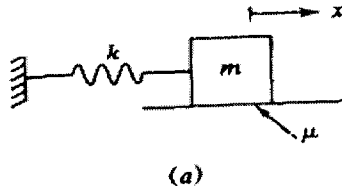
$$x\left(\frac{\pi}{\omega_n}\right) = -\delta + \frac{2\mu mg}{k} \quad (2.57)$$

Gerakan satu siklus sempurna digambarkan dengan persamaan 2.54 dan persamaan 2.56. Amplitudo berubah dari kondisi awal ke kondisi berikutnya dengan hubungan persamaan sebagai berikut:

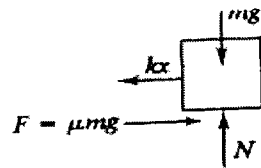
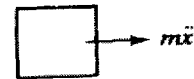
$$x(0) - x\left(\frac{\pi}{\omega_n}\right) = \frac{4\mu mg}{k} \quad (2.58)$$

Periode masing-masing siklus adalah:

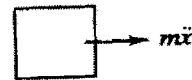
$$T = \frac{2\pi}{\omega_n} \quad (2.59)$$



=



=



Gaya eksternal

Gaya efektif

Gambar 2.13 Free body diagram coulomb damping

Coulomb damping tidak mengubah harga frekuensi natural. Metode matematika induksi digunakan untuk mendapatkan persamaan defleksi terhadap dua kondisi waktu yang dibahas sebelumnya. Berikut ini perpindahan dari massa pada setengah siklus dengan persamaan sebagai berikut:

$$x(t) = \left[ \delta - (4n-3) \frac{\mu mg}{k} \right] \cos \omega_n t + \frac{\mu mg}{k} \quad (2.60)$$

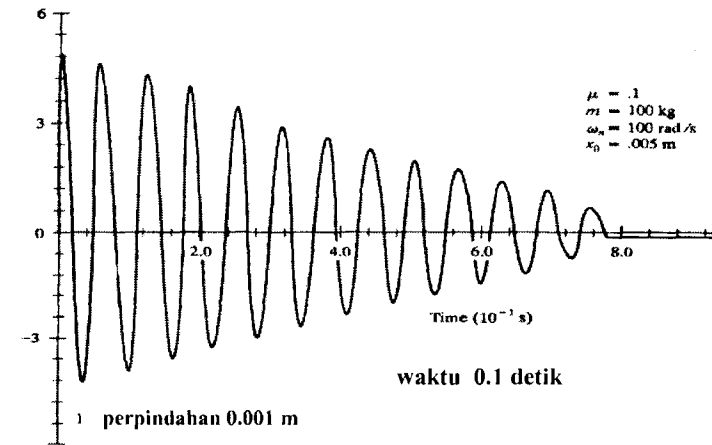
$$2(n-1) \frac{\pi}{\omega_n} \leq t \leq 2 \left( n - \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{\omega_n}$$

$$x(t) = \left[ \delta - (4n-1) \frac{\mu mg}{k} \right] \cos \omega_n t - \frac{\mu mg}{k} \quad (2.61)$$

$$2 \left( n - \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{\omega_n} \leq t \leq 2n \frac{\pi}{\omega_n}$$

$$x \left( 2n \frac{\pi}{\omega_n} \right) = \delta - 4n \frac{\mu mg}{k} \quad (2.62)$$

Dari persamaan 2.62 dapat dinyatakan bahwa displacement pada akhir siklus adalah dengan harga sebesar  $4\mu mg/k$  lebih kecil dari siklus sebelumnya. Amplitudo selanjutnya dari getaran bebas ini akan berkurang secara periodik dan linier sesuai hasil perhitungan menggunakan persamaan 2.60 dan persamaan 2.61. Kurva SDOF getaran bebas diasumsikan diredam oleh gaya friksi coulomb menjadi sebagai Gambar 2.14.



Gambar 2.14 Plot persamaan 2.60 dan 2.61

Asumsi pengurangan secara konstan untuk harga amplitudo terjadi sebagai akibat upaya mengatasi gaya gesek. Namun demikian gaya gesek penyebab mengecilnya amplitudo (disebut gaya gesek tersimpan) lebih kecil daripada gaya gesek coulomb, sehingga:

$$k \left| x \left( 2n \frac{\pi}{\omega_n} \right) \right| \leq \mu mg \quad (2.63)$$

Simpangan dari gerakan *ceases* selama 'n' siklus, di mana 'n' adalah integer, terjadi pada kondisi sebagai berikut:

$$n > \frac{k\delta}{4\mu mg} - \frac{1}{4} \quad (2.64)$$

Gerakan *ceases* sebagai simpangan konstan dari titik keseimbangan sama dengan  $\mu mg/k$  akan dipertahankan. Alasan utamanya adalah secara fisik gerakan semua sistem *ceases* dengan coulomb damping selalu terjadi Coulomb damping dalam beberapa bentuk, seperti gesekan axle dalam bantalan jurnal, dan gesekan pada belt. Respons sistem dengan redaman ini atau bentuk lain dari coulomb damping, dapat diperoleh dengan cara yang sama seperti respons pada massa yang sliding.

Bentuk umum dari persamaan diferensial untuk getaran bebas sistem linier dengan hanya coulomb damping sebagai sumber redaman adalah:

$$\ddot{x} + \omega_n x = \begin{cases} \frac{F_f}{m} & \dot{x} < 0 \\ -\frac{F_f}{m} & \dot{x} > 0 \end{cases} \quad (2.65)$$

Dalam hal ini  $F_f$  adalah besaran dari gaya redaman coulomb. Penurunan amplitudo ' $\Delta A$ ' persamaan siklus gerakan diperoleh dengan persamaan berikut:

$$\Delta A = \frac{4F_f}{m\omega_n^2} \quad (2.66)$$

Pembahasan SDOF ini sesungguhnya termasuk getaran bebas teredam. Hal utama yang menyebabkan SDOF teredam adalah gangguan gesekan coulomb. Gangguan lain atau gaya luar dan *sengaja* diberikan, yang selanjutnya disebut *eksitasi gaya atau beban* ini, diberikan pada sistem getaran bebas dan dibahas pada bab berikutnya, sebagai getaran SDOF tak bebas.

#### Contoh 2.7

Semua percobaan dilakukan untuk menentukan koefisien gesek kinetik antarbalok dan permukaan. Balok dipasang pegas dan bergerak 150 mm dari

titik keseimbangan. Diamati bahwa periode gerakan terjadi sebesar 0.5 detik dan amplitudo dapat mengecil sebesar 10 mm pada siklus berikutnya.

#### Tentukan:

Koefisien gesek kinetik dan berapa banyak siklus dari gerakan sebelum gerakan *ceases*.

#### Jawab:

Frekuensi natural dihitung dan diperoleh sebagai berikut:

$$\omega_n = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0,5 \text{ s}} = 12,57 \text{ rad/s}$$

Pengurangan amplitudo diekspresikan sebagai berikut:

$$\Delta A = \frac{4\mu mg}{k} = \frac{4\mu g}{\omega_n} = 10 \text{ mm}$$

Dengan menyusun kembali persamaan di atas maka akan didapatkan koefisien gesek sebagai berikut:

$$\mu = \frac{\Delta A}{4g} \omega_n^2 = \frac{(0,01 \text{ m})(12,57 \text{ rad/s})}{4(9,81 \text{ m/s}^2)} = 0,04$$

Banyak siklus dari gerakan sebelum gerakan *ceases* yang terjadi menjadi.

$$n = \frac{\omega_n^2 \delta}{4\mu g} - \frac{1}{4} = \frac{(12,57 \text{ rad/s})(0,15 \text{ m})}{4(0,04)(9,81 \text{ m/s}^2)} - \frac{1}{4} = 15$$

## 2.5 Ringkasan

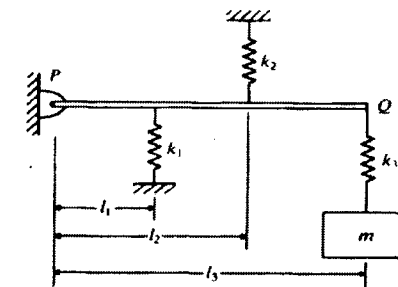
Getaran bebas pada satu derajat kebebasan terdiri dari *getaran bebas tak teredam* dan *getaran bebas teredam*. Getaran bebas teredam dibagi menjadi tiga kondisi yang diindikasikan oleh besarnya rasio redaman  $\zeta$ , yaitu underdamped di mana  $\zeta < 1$ , critical damped  $\zeta = 1$  dan overdamped  $\zeta > 1$ . Untuk underdamped, respons getarannya berosilasi. Sebaliknya, pada critical damped dan overdamped, respons getarannya tidak berosilasi.

## 2.6 Pertanyaan untuk Pemahaman

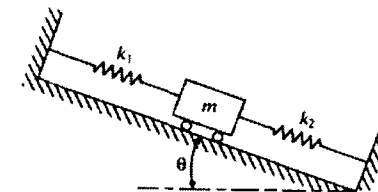
- Jelaskan perbedaan dari:
  - SDOF dan MDOF ditinjau terhadap idealisasi benda lamp mass.
  - Getaran bebas dan getaran tak bebas dari model terhadap :SDOF ciri eksitasi berupa gaya, persamaan getaran, dan penerapan sistem riil.
  - Getaran bebas teredam dan getaran bebas tak teredam dari model SDOF(gambar idealisasi masing-masing dan jelaskan perbedaannya).
- Plot hasil dua kurva model getaran bebas, model getaran teredam, dan kurva getaran bebas tidak teredam. Lengkapi kurva ini dengan parameter getaran (seperti amplitudo, frekuensi), dan jelaskan pula kedua kondisi kurva tersebut!
- Penyebab getaran bebas teredam adalah viscous damping sehingga efek redaman yang timbul dibedakan menjadi tiga kondisi. Sebutkan tiga kondisi tersebut dan nyatakan 4(empat) perbedaan ditinjau dari bentuk kurva, dan harga parameter, untuk masing-masing kondisi!
- Tiga persamaan getaran bebas SDOF, seperti persamaan 2.33(a) sampai persamaan 2.33(c), sebenarnya memiliki kesamaan dan perbedaan hanya akibat parameter yang sudah diketahui. Sebutkan minimal dua persamaan dan minimal tiga perbedaan untuk masing-masing persamaan tersebut!
- Menentukan jumlah siklus getaran bebas SDOF teredam menjadi terhenti adalah penting untuk memastikan efek kerusakan getaran pada benda. Sebutkan atau buat resume, minimal lima tahapan perhitungan bagaimana menentukan jumlah siklus agar dipastikan getaran terhenti!
- Sebutkan minimal tiga perbedaan antara: getaran bebas teredam dengan, getaran paksa atau dengan istilah lain untuk getaran tak beban!
- Jelaskan apa yang disebut penurunan algoritmik, dan nyatakan dalam lima tahapan bagaimana mendapatkan harga tersebut!

## 2.7 Soal

- Sebuah sistem massa-pegas memiliki periode natural 0.25 detik. **Berapakah nilai** periodenya jika konstanta pegas:
  - dinaikkan 40 %, dan (b) diturunkan 25 %.
- Sebuah sistem massa-pegas memiliki frekuensi natural 15 Hz. Apabila konstanta pegas dikurangi 1000 N/m, frekuensi naturalnya tinggal 40%. Tentukan massa dan konstanta pegas di awal sistem!
- Kecepatan maksimum dari massa yang berosilasi secara harmonis adalah 12 cm/s, periode osilasinya 3 detik. Jika massa dilepas dengan displacement awal 1.5 cm, tentukan (a) amplitudo (b) kecepatan awal (c) percepatan maksimum, dan (d) sudut phase !
- Tiga buah pegas tersusun seperti gambar di bawah ini. Tentukan frekuensi alami getaran dari sistem!



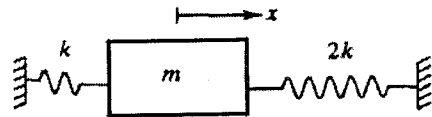
- Tentukan rumus frekuensi alami getaran dari sistem pegas-massa yang terlihat pada gambar di bawah ini!



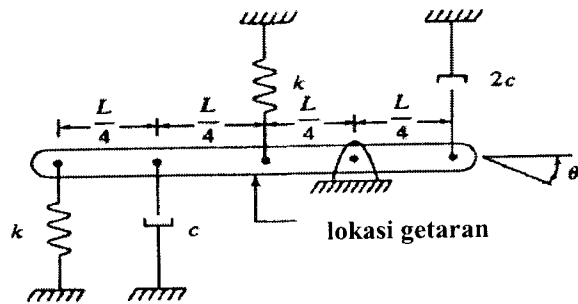
- Sebuah mobil dengan massa 1500 kg mendefleksi pegas sejauh 0.015 m dalam kondisi statik. Tentukan frekuensi alami mobil dalam arah vertikal dengan asumsi redaman diabaikan!



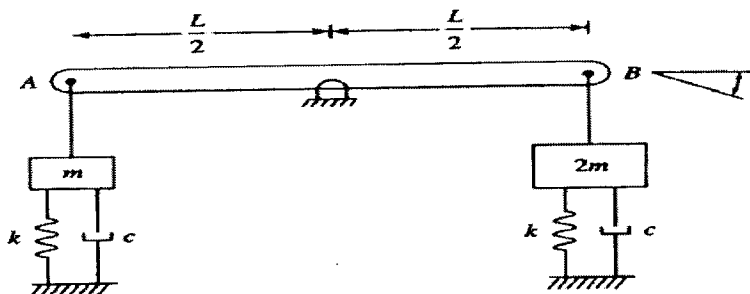
7. Sebuah sistem pegas-massa-redaman dengan  $m = 70$  kg dan  $k = 5500$  N/m. Tentukan kondisi berikut: (a) konstanta redaman kritis (b) frekuensi redaman natural apabila  $c = c_c/2$ , dan (c) Pengurangan logaritmik yang terjadi!
8. Turunkan persamaan diferensial dari persamaan getaran bebas sistem satu derajat kebebasan dengan menerapkan koordinat yang tepat dari gambar di bawah ini!



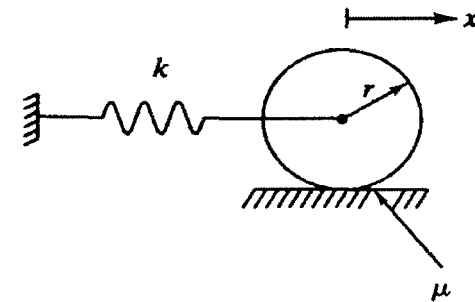
9. Turunkan persamaan diferensial getaran dari sistem satu derajat kebebasan dengan menerapkan koordinat yang tepat dari gambar di bawah ini!



10. Turunkan persamaan diferensial getaran dari sistem satu derajat kebebasan dengan menerapkan koordinat yang tepat dari gambar di bawah ini!

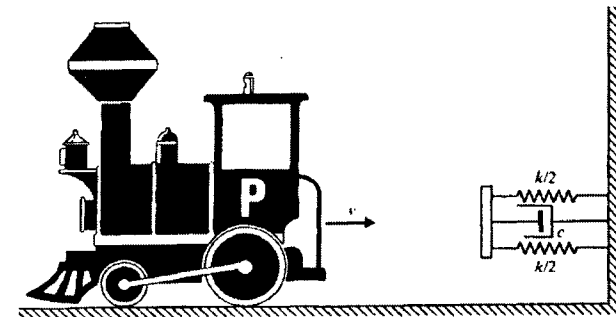


11. Pusat dari piringan tipis seperti gambar soal no. 8 dipindahkan sejauh  $\delta$ . Piringan tersebut kemudian dilepas. Jika koefisien gesek piringan dengan permukaan adalah  $\mu$ , displacement awal cukup dengan membuat piringan tersebut menggelinding dan slip.
- Buatlah persamaan diferensial dari gerakan untuk kasus ini!
  - Buatlah persamaan diferensial dari gerakan ketika piringan menggelinding tanpa slip!
  - Berapakah perubahan amplitudo persamaan siklus?



Gambar Soal No.8

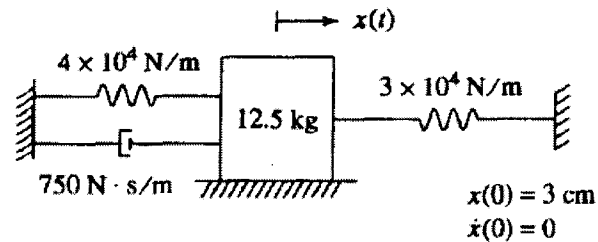
12. Kepala gerbong kereta api dengan massa 2000 kg berjalan dengan kecepatan 10 m/s dihentikan di ujung lintasan oleh sistem pegas-redaman seperti terlihat pada gambar di bawah ini.



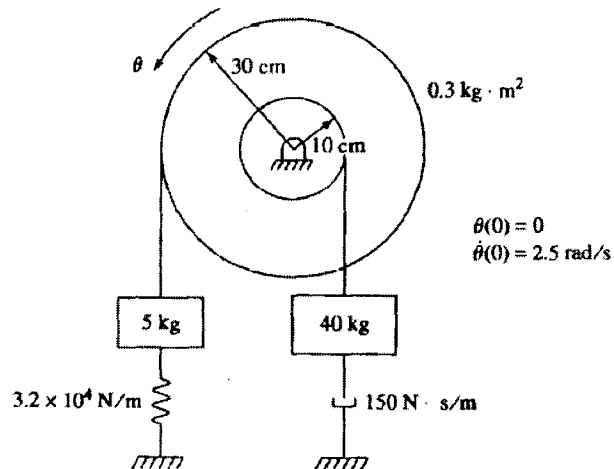
Jika konstanta pegas  $k = 40$  N/mm dan konstanta redaman  $c = 20$  N.s/m, tentukan:

- Displacement maksimum dari kepala gerbong setelah menabrak sistem pegas-redaman tersebut.

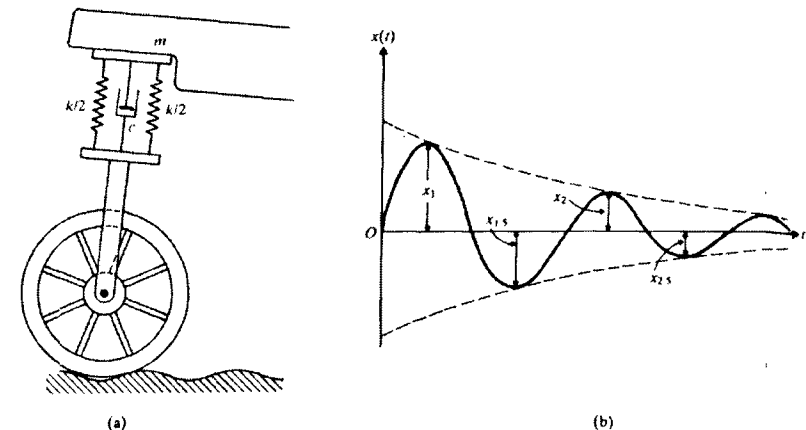
- b. Waktu yang diperlukan untuk mencapai displacement maksimum tersebut.
13. Untuk sistem yang diperlihatkan pada gambar di bawah ini, tentukan:
- Rasio redaman
  - Apakah kondisi sistem *underdamped*, *critical*, atau *overdamped*.
  - $x(t)$  atau  $\theta(t)$  untuk suatu nilai kondisi awal.



14. Untuk sistem yang diperlihatkan pada gambar di bawah ini, tentukan:
- Rasio redaman.
  - Apakah kondisi sistem *underdamped*, *critical* atau *overdamped*.
  - $x(t)$  atau  $\theta(t)$  untuk suatu nilai kondisi awal.

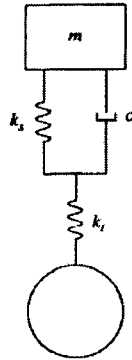


15. Sebuah mesin dengan massa 50 kg ditempatkan pada sebuah fondasi elastis mengalami getaran bebas yang hilang secara eksponensial dengan frekuensi 91.7 rad/s. Namun ketika sebuah mesin dengan massa 60 kg ditempatkan pada sebuah fondasi yang sama dan mengalami getaran bebas yang hilang secara eksponensial dengan frekuensi 75.5 rad/s, tentukan harga ekuivalen stiffness dan ekuivalen dampingnya!
16. Selama beroperasi sebuah mesin press dengan massa 600 kg mendapatkan beban impuls sebesar 7500 N.s. Mesin dipasang pada fondasi elastis yang dapat dimodelkan sebagai pegas stiffness 1000000 N/m yang dipararel dengan redaman viscous 9000 N.s/m. Berapakah displacement maksimum dari penekan setelah impuls dilakukan? Asumsikan penekan diam ketika impuls dilakukan.
17. Sebuah underdamped shock absorber didesain untuk sebuah sepeda motor dengan massa 250 kg seperti terlihat pada gambar soal No.17a. Ketika shock absorber mendapatkan kecepatan awal dikarenakan adanya gundukan di jalan, grafik hasil displacementnya terhadap waktu terlihat pada gambar soal No.17b. Tentukan besar konstanta pegas dan redaman dari shock absorber jika periode redaman getaran adalah 4 detik dan amplitudo  $x_1$  tereduksi menjadi  $1/4$ -nya pada  $1/2$  periode berikutnya ( $x_{1.5} = x_1/4$ ). Tentukan juga kecepatan awal minimum yang menyebabkan displacement maksimum (amplitudo maksimum) sebesar 50 mm!



Gambar Soal No.17

18. Turunkan persamaan getaran dari model di bawah ini!



19. Sebuah benda bergetar dengan redaman viscous 5 x persamaan detik dan 70 siklus. Amplitudonya berkurang 20%. Tentukan pengurangan logaritmik dan rasio redaman!
20. Sistem dengan redaman viscous memiliki konstanta stiffness 5000 N/m, konstanta redaman kritis 0.15 N.det/mm, dan pengurangan logaritmik adalah 3. Jika sistem diberi kecepatan awal 0.5 m/s, tentukan displacement maksimum sistem!

# BAB 3

## EKSITASI SISTEM SATU DERAJAT KEBEBASAN

Kompetensi yang ingin dicapai setelah mempelajari bab ini adalah:

1. Memahami jenis-jenis eksitasi pada sistem satu derajat kebebasan.
2. Memahami fenomena resonansi dan pengaruhnya terhadap sistem getaran.
3. Memahami fenomena *beating*.
4. Dapat menganalisis sistem getaran SDOF dengan eksitasi harmonis, baik pada sistem tak teredam maupun teredam.
5. Dapat menganalisis sistem getaran dengan eksitasi harmonik pada base.
6. Dapat menganalisis sistem getaran dengan eksitasi harmonik pada *rotating unbalanced masses*.
7. Dapat menganalisis sistem getaran dengan eksitasi harmonik pada sistem redaman Coulomb.

### 3.1 Pendahuluan

Suatu sistem dinamis seringkali mendapatkan rangsangan gaya luar atau eksitasi, atau dapat disebut sebagai fungsi eksitasi. Eksitasi umumnya *time-dependent*, misalnya harmonik, periodik, impact, ataupun random. Solusi dari persamaan getaran tanpa melihatkan eksitasi disebut solusi dengan *persamaan transien*, dan solusi persamaan getaran dengan mempertimbangkan eksitasi disebut solusi dengan *persamaan steady state*. *Solusi total displacement* dari permasalahan getaran merupakan penjumlahan persamaan transien dan steady state. Eksitasi riil sesungguhnya merupakan bentuk random atau tak teratur, misalnya mobil melaju dengan eksitasi dari kontur

jalan, dan pesawat terbang menerima eksitasi dari kontur perbedaan tekanan udara akibat cuaca, sehingga kajian eksitasi harmonik atau periodik digunakan untuk analisis sederhana pemahaman fenomena getaran. Pembahasan kinerja idealisasi model getaran fokus pada dua hal, yaitu evaluasi terhadap kurva respons frekuensi dan kurva respons dinamik. Dalam bab ini kita akan membahas kinerja getaran SDOF terhadap beberapa eksitasi dalam bentuk: gaya eksponensial dengan  $F(t)=F_0 e^{(\omega t+\Phi)}$ , periodik trigonometri  $F(t)=F_0 \sin(\omega t+\Phi)$ , atau  $F(t)=F_0 \cos(\omega t+\Phi)$ , beban impact sebagai impuls, getaran benda apung, dan pendekatan eksitasi sebagai gaya dengan deret Fourier.

Parameter eksitasi yaitu berupa gaya asumsi trigonometri, dengan ' $F_0$ ' sebagai amplitudo eksitasi gaya maksimum yang dapat dicapai, ' $\omega$ ' yang disebut dengan frekuensi eksitasi, dan ' $\phi$ ' adalah sudut phase eksitasi harmonik. Harga ' $\phi$ ' tidak dapat ditentukan secara bebas tetapi harga ini tergantung nilai ' $F(t)$ ' pada  $t = 0$  yang umumnya diperoleh dari hasil: pengamatan dari percobaan, data riil, atau asumsi awal. Kajian sederhana umumnya ' $\phi$ ' berharga nol. Selama mengalami eksitasi harmonik, respons sistem juga harmonik. Jika frekuensi eksitasi sama dengan frekuensi natural sistem, maka akan menyebabkan secara teori *kurva respons frekuensi* untuk *rasio frekuensi sama dengan satu* atau ' $\zeta=1$ ', menjadi tak hingga. Kondisi ini disebut resonansi yang harus dihindari untuk mencegah kerusakan pada sistem. Dalam kondisi ini *desain redaman* menjadi penting, dan umumnya hasil perhitungan teori dengan asumsi redaman untuk sistem getaran dinamik diperoleh lebih konservatif (estimasi harga redaman lebih besar). Jawaban model getaran dengan eksitasi asumsi gaya *dalam bentuk apapun* antara lain dapat mengikuti gaya dengan pendekatan aturan *deret Fourier*. Hal ini merupakan sumbangan solusi getaran yang mengarah pada perhitungan dengan komputer. Koefisien dalam deret dapat diasumsikan sebanyak yang dibutuhkan untuk mencapai gaya ekuivalen dengan persentase kesalahan yang dapat ditoleransi.

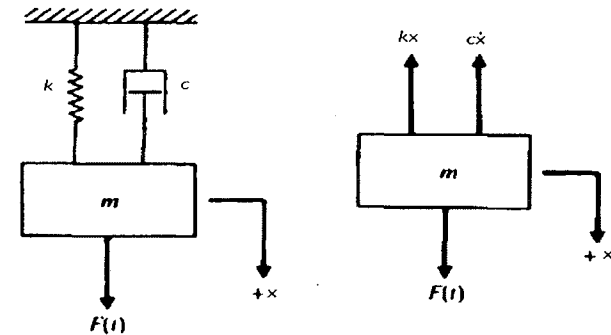
Jika suatu eksitasi dikenakan pada sistem redaman pegas-massa SDOF seperti ditunjukkan pada Gambar 3.1, maka persamaan gerak dapat diturunkan dengan prinsip hukum kedua Newton. Hal ini disebut perolehan persamaan getaran dengan *Metode Newton*, menjadi sebagai berikut ini:

$$m \ddot{x} + c \dot{x} + k x = F(t) \quad (3.1)$$

Metode Newton akan dibahas detail sehubungan dengan penyusunan persamaan getaran benda Lamp Mass MDOF pada bab selanjutnya. Karena

persamaan 3.1 adalah persamaan diferensial jenis non-homogen maka solusi umumnya adalah:

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) \quad (3.2)$$



a. Idealisasi SDOF      b. Diagram Benda Bebas

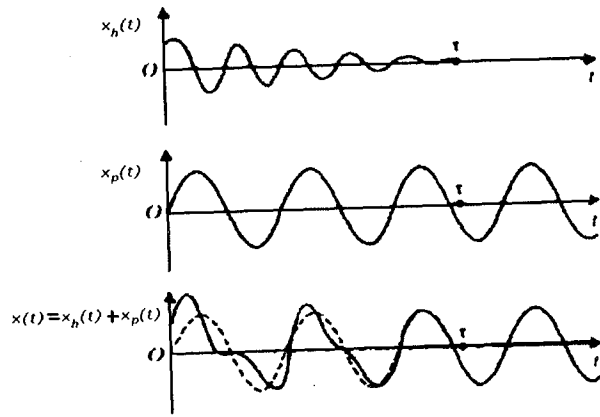
Gambar 3.1 Sistem redaman pegas-massa SDOF

Solusi total displacement ini terdiri dari persamaan transien  $x_h(t)$  ditambah dengan persamaan steady state  $x_p(t)$ . Persamaan transien SDOF ditentukan dari asumsi eksitasi dari gaya luar diabaikan, dan solusi transien menggunakan persamaan homogen berikut ini:

$$m \ddot{x} + c \dot{x} + k x = 0 \quad (3.3)$$

Persamaan getaran tanpa eksitasi atau disebut *persamaan homogen* merupakan representasi getaran bebas yang akan hilang dengan tiga kondisi seperti yang sudah dibahas sebelumnya mengikuti persamaan 2.34 sampai persamaan 2.50, yaitu kondisi *underdamped*, *critical*, dan *overdamped*, sesuai syarat kondisi awal. Dalam bab ini pembahasan fokus pada aspek komponen solusi parsial dari  $x_p(t)$  sesuai dalam persamaan 3.1. Solusi ini merupakan kondisi sistem tunak atau *Incompressible System*. Persamaan gerak dalam kondisi tunak muncul selama fungsi eksitasi untuk gaya diberlakukan atau selama sistem menerima eksitasi. Jika tidak (setelah sebelumnya menerima eksitasi gaya), kembali solusi persamaan transien dinyatakan dengan tiga kemungkinan terhadap waktu sesuai Gambar 3.2. Dari gambar tersebut terlihat bahwa  $x_h(t)$  akan sampai pada kondisi dengan simpangan sangat kecil atau hilang dan  $x(t)$  menjadi  $x_p(t)$  setelah beberapa saat atau setelah  $\tau$  detik.  $\tau$  merupakan waktu yang dibutuhkan dari kondisi getaran

mulai tidak diberlakukan eksitasi sampai pengaruh gaya tersebut tidak ada. Bagian dari persamaan umum yang hilang ini disebabkan oleh redaman sistem. Efek redaman sistem ini disebut *bagian transien*. Laju penurunan gerakan transien tergantung pada harga parameter sistem getaran seperti  $k$ ,  $c$ , dan  $m$ .



Gambar 3.2 Simpangan Sistem redaman pegas-massa

### 3.2 Eksitasi Harmonik SDOF dengan Beda Phase

Selama eksitasi berupa gaya diterapkan, dan dipilih untuk kondisi SDOF tanpa peredam sistem atau sebagai sistem getaran tak teredam, persamaan getaran mempunyai eksitasi berupa gaya yang dibahas dalam sub bab ini dengan asumsi sederhana yaitu  $F(t) = F_0 \cos(\omega t + \Phi)$ . Sehingga persamaan getaran berbentuk:

$$m \ddot{x} + kx = F_0 \cos(\omega t + \phi) \quad (3.4)$$

Solusi transien atau homogen dari persamaan 3.4 adalah:

$$x_h(t) = A_1 \cos \omega_n t + A_2 \sin \omega_n t \quad (3.5)$$

Sedangkan solusi partisial atau persamaan steady state diasumsikan dengan bentuk sebagai berikut:

$$x_p(t) = X \cos \omega t \quad (3.6)$$

$X$  merupakan amplitudo maksimum dari gaya eksitasi solusi parsial  $x_p(t)$ . Secara teori, amplitudo ini dapat dicari dengan menggunakan prinsip formula matematik identitas persamaan getaran, atau dilakukan dari substitusi persamaan 3.6 pada persamaan 3.4, sehingga diperoleh:

$$X = \frac{F_0}{k - m\omega^2} \quad (3.7)$$

Solusi total dari persamaan getaran dengan asumsi sederhana eksitasi gaya harmonik fungsi trigonometri cosinus adalah:

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) = A_1 \cos \omega_n t + A_2 \sin \omega_n t + \frac{F_0}{k - m\omega^2} \cos \omega t \quad (3.8)$$

Dengan asumsi kondisi awal  $x(t=0) = x_0$  dan  $\dot{x}(t=0) = \dot{x}_0$ , secara kebetulan keduanya menggunakan angka sama, maka dua konstanta dari persamaan 3.8 diperoleh, yaitu:

$$A_1 = x_0 - \frac{F_0}{k - m\omega^2} \quad \text{dan} \quad A_2 = \frac{\dot{x}_0}{\omega_n} \quad (3.9)$$

Sehingga solusi umum dari persamaan getaran dengan asumsi eksitasi harmonik sesuai kondisi awal yang ditentukan adalah:

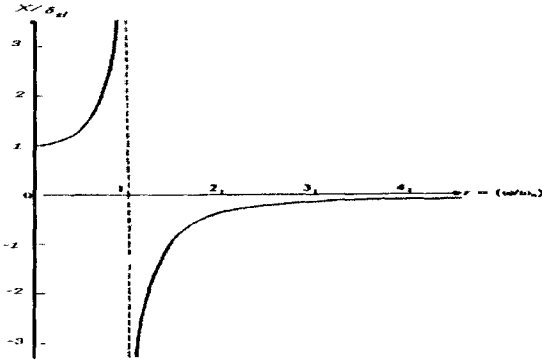
$$x(t) = \left( x_0 - \frac{F_0}{k - m\omega^2} \right) \cos \omega_n t + \frac{\dot{x}_0}{\omega_n} \sin \omega_n t + \frac{F_0}{k - m\omega^2} \cos \omega t \quad (3.10)$$

Amplitudo maksimum  $X$  pada persamaan 3.7 dapat diperoleh dalam bentuk persamaan berikut:

$$\frac{X}{\delta_{st}} = \frac{1}{1 - \left( \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2} \quad (3.11)$$

$\delta_{st} = F_0 / k$  menunjukkan defleksi dari massa yang mengalami gaya ' $F_0$ ' dan seringkali disebut dengan defleksi pada kondisi bebas statis. Hal ini disebabkan oleh karena ' $F_0$ ' merupakan gaya statik yang konstan sebesar  $X/\delta_{st}$ .  $F_0/k$  disebut sebagai *Rasio Amplitudo* atau merupakan faktor penguatan. Kurva rasio amplitudo sebagai fungsi dari frekuensi pada lokasi frekuensi pribadi

rasio dinyatakan pada Gambar 3.3. Solusi ini berlaku untuk SDOF tanpa redaman.

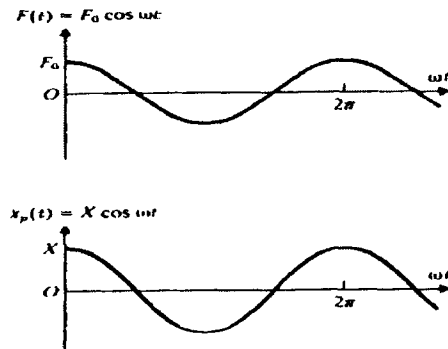


Gambar 3.3 Kurva amplitudo rasio SDOF tanpa redaman

Dari Gambar 3.3 dapat kita identifikasi respons sistem menjadi 3 tipe, yaitu:

**Kasus 1** dengan  $0 < \omega / \omega_n < 1$

Konsekuensi dari kondisi ini, penyebut pada persamaan 3.11 bernilai positif dan respons yang diberikan oleh persamaan 3.6 tidak berubah. Respons harmonik dari sistem  $x_p(t)$  dikatakan dalam satu phase dengan gaya eksitasi seperti terlihat pada Gambar 3.4.



Gambar 3.4 Displacement dari beda phase eksitasi harmonik  $0 < \omega / \omega_n < 1$

**Kasus 2** dengan  $\omega / \omega_n > 1$

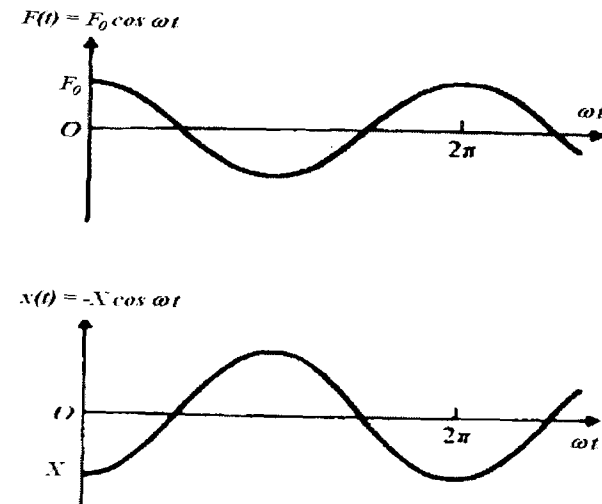
Dengan persyaratan frekuensi rasio lebih besar dari satu, maka penyebut pada persamaan 3.11 menjadi negatif sehingga asumsi displacement dicantumkan dengan tanda negatif. Solusi kondisi tunak ini dapat diasumsikan dengan persamaan berikut:

$$x_p(t) = -X \cos \omega t \quad (3.12)$$

Getaran dengan amplitudo  $X$  solusi steady state dapat dinyatakan dengan hubungan sebagai berikut:

$$X = \frac{\delta_{st}}{\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 - 1} \quad (3.13)$$

Kurva pada Gambar 3.5 menunjukkan  $F(t)$  dan  $x_p(t)$  sebagai fungsi dari waktu mempunyai tanda yang berlawanan, dengan lokasi puncak dan lembah keduanya pada waktu yang sama.  $F(t)$  dan  $x_p(t)$  selalu dengan tanda berlawanan, dan hal ini dikatakan bahwa keduanya dalam kondisi *beda phase 180°*. Perhitungan teoretis lebih jauh kondisi  $\omega/\omega_n \rightarrow \infty$ ,  $X \rightarrow 0$ . Respons sistem terhadap eksitasi harmonik mendekati nol.



Gambar 3.5 Displacement dari Beda phase eksitasi Harmonik  $\omega / \omega_n > 1$

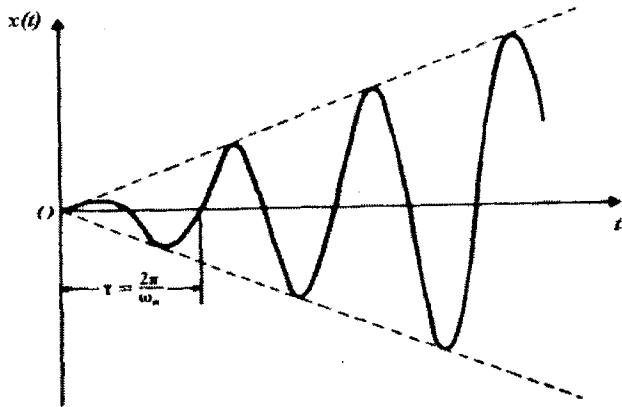
**Kasus 3** dengan  $\omega / \omega_n = 1$

Amplitudo solusi steady state sebagai ' $X(t)$ ' dinyatakan sesuai persamaan 3.11 atau persamaan 3.13. Dengan kondisi ini, amplitudo menjadi tak terhingga untuk kondisi frekuensi dari eksitasi harmonik sama dengan frekuensi natural. Fenomena ini dikenal dengan resonansi. Untuk menentukan respons kondisi ini maka persamaan 3.10 ditulis ulang menjadi persamaan 3.14.

$$x(t) = x_0 \cos \omega_n t + \frac{x_0}{\omega_n} \sin \omega_n t + \delta_{st} \left[ \frac{\cos \omega t - \cos \omega_n t}{1 - \left( \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2} \right] \quad (3.14)$$

Suku terakhir dari persamaan 3.14 menjadi dapat tak terdefinisikan untuk kondisi resonansi dengan  $\omega = \omega_n$ . Kontrol terhadap resonansi dilakukan dengan membuat analisis harga suku terakhir pada kondisi waktu tak ber-hingga. *Aturan hospital* digunakan untuk menentukan limit dari suku terakhir ini sehingga persamaan 3.14 menjadi:

$$x(t) = x_0 \cos \omega_n t + \frac{x_0}{\omega_n} \sin \omega_n t + \frac{\delta_{st} \omega_n t}{2} \sin \omega_n t \quad (3.15)$$



**Gambar 3.6** Kurva SDOF tanpa redaman kondisi resonansi

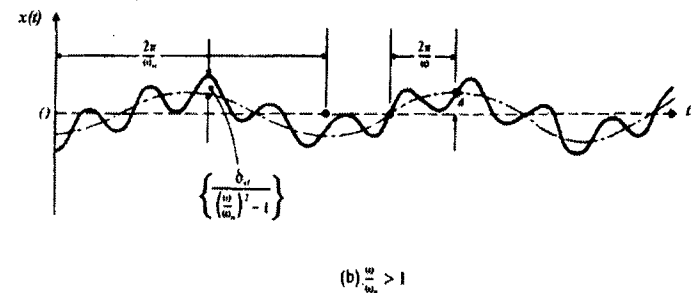
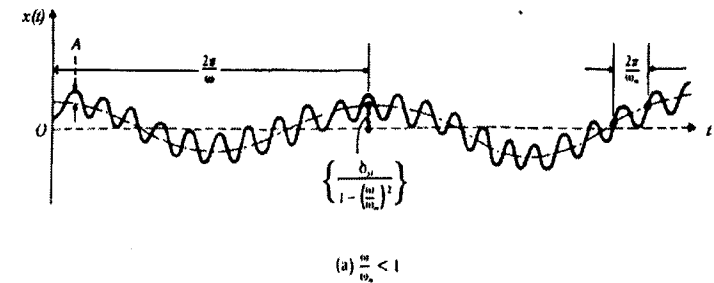
Kurva pada Gambar 3.6 dari persamaan 3.15 menunjukkan pertambahan displacement yang menanjak terus-menerus atau fenomena resonansi dinyatakan sebagai  $x(t)$  yang naik secara tajam sampai tak terhingga. Suku terakhir tersebut juga bertambah secara linier seiring terjadinya perubahan waktu.

Persamaan umum dari eksitasi harmonik pada satu derajat kebebasan seperti pada persamaan 3.8 atau 3.10 dapat diekspresikan dalam bentuk lain seperti berikut:

$$x(t) = A \cos(\omega_n t - \phi) + \frac{\delta_{st}}{1 - \left( \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2} \cos \omega t ; \text{ untuk } \frac{\omega}{\omega_n} < 1 \quad (3.16)$$

$$x(t) = A \cos(\omega_n t - \phi) - \frac{\delta_{st}}{1 - \left( \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2} \cos \omega t ; \text{ untuk } \frac{\omega}{\omega_n} > 1 \quad (3.17)$$

Penyelesaian untuk mendapatkan harga amplitudo diperoleh dari persamaan 2.38 dan harga ' $\phi$ ' dihitung dari persamaan 2.39. Persamaan gerak yang sempurna dapat diekspresikan sebagai jumlah antara dua kurva cosinus dengan frekuensi yang berbeda. Pada persamaan 3.16, frekuensi eksitasi lebih kecil dari frekuensi natural sistem sehingga respons total dari persamaan ini dapat dilihat pada Gambar 3.7(a). Sedangkan pada persamaan 3.17 frekuensi eksitasi lebih besar dari frekuensi natural sistem. Respons total dari persamaan ini dapat dilihat pada Gambar 3.7(b).



**Gambar 3.7** Respons total frekuensi natural eksitasi harmonik SDOF

Selain fenomena resonansi, ada juga *Fenomena Beating*. Pada fenomena ini, frekuensi eksitasi *mendekati* (bukan sama dengan) frekuensi natural

sistem. Pada kondisi ini juga amplitudo sistem pada frekuensi tersebut memiliki pola naik dan turun. Fenomena ini dapat dijelaskan dengan persamaan 3.10, untuk asumsi kondisi awal  $x_0 = \dot{x}_0 = 0$ . Sehingga persamaan 3.10 itu berubah menjadi:

$$x(t) = \frac{F_0/m}{\omega_n^2 - \omega^2} (\cos \omega t - \cos \omega_n t)$$

$$= \frac{F_0/m}{\omega_n^2 - \omega^2} \left( 2 \sin \frac{\omega + \omega_n}{2} t \sin \frac{\omega - \omega_n}{2} t \right) \quad (3.18)$$

Kita asumsikan kondisi  $\omega$  sedikit lebih kecil dari  $\omega_n$  sehingga

$$\omega_n - \omega = 2\varepsilon \quad (3.19)$$

Tinjauan *Parameter Epsilon* 'ε' sebagai 'nilai atau kuantitas' yang sangat kecil dan positif. Kemudian kondisi frekuensi operasional dari eksitasi harmonik mendekati frekuensi pribadi atau ' $\omega_n \approx \omega$ '. Penjumlahan frekuensi diasumsikan seperti berikut:

$$\omega_n + \omega \approx 2\omega \quad (3.20)$$

Gabungan selisih kuadrat dari kedua frekuensi dengan harga yang berdekatan ini diperlukan untuk disubsitusikan dengan besaran yang sama. Dari manipulasi perkalian persamaan 3.19 dengan persamaan 3.20 diperoleh:

$$\omega_n^2 - \omega^2 = 4\varepsilon\omega \quad (3.21)$$

Dengan menggunakan persamaan 3.19 sampai 3.21 ke persamaan 3.18 diperoleh persamaan berikut:

$$x(t) = \left( \frac{F_0/m}{2\varepsilon\omega} \sin \varepsilon t \right) \sin \omega t \quad (3.22)$$

Level nominal harga epsilon atau 'ε' umumnya sangat kecil. Hal ini memberi efek fungsi 'sin (εt)' bervariasi secara perlahan dengan periode ' $2\pi/\varepsilon$ ' dan membesar. Peningkatan ini seiring dengan waktu yang semakin besar tetapi meningkat bertahap sesuai harga periode yang sama dengan ' $2\pi/\omega$ '. Getaran baru pada fenomena beating mempunyai periode ' $2\pi/\omega$ '. Variasi amplitudo dinyatakan dengan persamaan berikut ini:

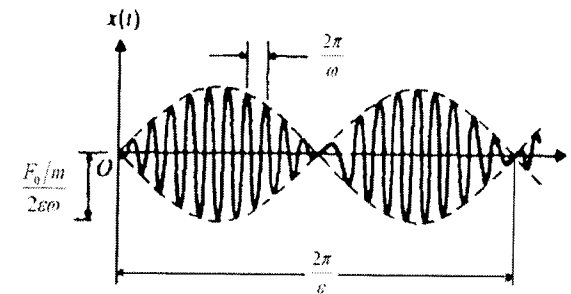
$$x(t) = \frac{F_0/m}{2\varepsilon\omega} \sin \varepsilon t$$

Kurva penggambaran defleksi kondisi sistem getar akibat fenomena beating ini, dapat diamati bahwa kurva 'sin (ωt)' berkembang dalam beberapa siklus namun 'sin (εt)' hanya terjadi dari kondisi bersesuaian dengan satu siklus. Interferensi kedua modus getar ini yaitu, modus transien dengan steady state, dapat diamati pada Gambar 3.8. Interferensi kurva sin (ωt) dan sin (εt) menyebabkan amplitudo membesar dan mengecil secara berkesinambungan. Eksitasi harmonik pada sistem getar diaplikasikan selamanya dan gaya harmonik ini dapat memberikan pola getaran sesuai fungsi trigonometri eksitasi gaya yang diasumsikan. Waktu antara amplitudo bernilai nol dengan amplitudo bernilai maksimum disebut dengan *Periode Beating* ( $\tau_b$ ). Periode beating ini dapat diekspresikan dengan persamaan berikut:

$$\tau_b = \frac{2\pi}{2\varepsilon} = \frac{2\pi}{\omega_n - \omega} \quad (3.23)$$

*Frekuensi Beating* didefinisikan sebagai berikut:

$$\omega_b = \omega_n - \omega = 2\varepsilon$$



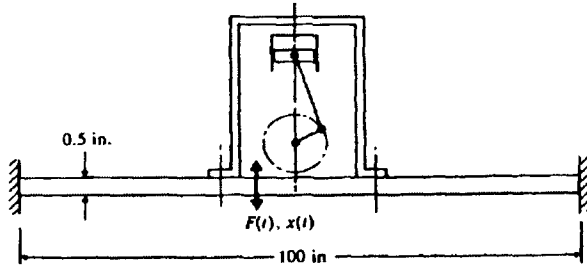
Gambar 3.8 Rasio eksitasi massa SDOF

### Contoh 3.1

Sebuah pompa torak dengan berat 150 lb dipasang di pertengahan plat baja dengan ketebalan 0,5 in, lebar 20 in, dan panjang 100 in. Plat baja diclamp pada kedua ujungnya seperti Gambar 3.9. Selama pompa beroperasi, plat mengalami eksitasi harmonik sebesar  $F(t) = 50 \cos(62,832 \times t)$  lb.



Tentukan amplitudo getaran dari plat.



Gambar 3.9 Skema sistem pompa torak

**Jawab:**

Plat dapat dimodelkan sebagai batang tetap dengan:

Modulus Young ( $E$ ) =  $30 \times 10^6$  psi dan kemudian,

Momen inersia ( $I$ ) =  $1/12 (20) (0.5)^3 = 0.2083 \text{ in}^4$ .

Konstanta kekakuan dari batang  $k = \frac{192EI}{l^3}$

Data harga  $E$  dan  $I$  digunakan untuk memperoleh  $k = 1200 \text{ lb/in}$ . Amplitudo respons getaran harmonik mengikuti yang disampaikan pada persamaan 3.7 dengan harga parameter  $F_0 = 50 \text{ lb}$ ,  $m = 150/386,4 \text{ lbs}^2/\text{in}$  (dengan asumsi massa plat diabaikan),  $k = 1200 \text{ lb/in}$ , dan  $\omega = 62,832 \text{ rad/s}$ . Semua data ini memberikan harga amplitudo sebagai berikut:

$$X = \frac{F_0}{k - m\omega^2} = \frac{50}{1200 - (150/386,4)(62,832)^2} = -0,1504 \text{ in}$$

Tanda negatif menunjukkan bahwa respons  $x(t)$  dari plat *out of phase* bersesuaian dengan arah eksitasi harmonik dengan  $F(t)$  sesuai arah positif dari yang didefinisikan.

### 3.3 Eksitasi Harmonik SDOF Tanpa Beda Phase

Respons sistem getaran dinyatakan dalam dua kurva, yaitu kurva rasio eksitasi harmonik terhadap displacement sebagai fungsi dari rasio frekuensi gaya redaman terhadap frekuensi pribadi yang disebut *kurva frekuensi respons*, dan kurva parameter dinamik (displacement, kecepatan, dan

percepatan) sebagai fungsi dari waktu yang disebut *kurva dinamik respons*. Persamaan umum getaran SDOF dengan eksitasi harmonik dengan redaman 'c' dan  $F(t) = F_0 \cos \omega t$  adalah sebagai berikut:

$$m \ddot{x} + c \dot{x} + kx = F_0 \cos \omega t \quad (3.25)$$

Solusi persamaan *steady state* dari persamaan getaran SDOF ini diasumsikan harmonik sederhana dengan:

$$x_p(t) = X \cos(\omega t - \phi) \quad (3.26)$$

Solusi persamaan ini sesungguhnya merupakan asumsi dan asumsi diberikan mengikuti tipe eksitasi fungsi harmonik, yang dalam hal ini adalah *cosinus*. Konstanta  $X$  sebagai amplitudo displacement dan  $\phi$  disebut sebagai *beda phase*. Dalam literatur lain disebutkan, beda phase disebut juga *sudut phase*. Umumnya periode displacement *hampir sama* dengan periode eksitasi, kecuali pada waktu awal penerapan eksitasi gaya cosinus tersebut. Inersia pegas dan redaman membuat perbedaan antara *skala harga* displacement  $x_p(t)$  dengan *skala harga eksitasi*, untuk waktu yang sama. Perbedaan skala harga ini jika diasumsikan satu periode dengan  $2\pi$  atau kondisi 360 derajat, maka beda phase sebesar ' $\phi$ '. Hal ini berarti bahwa harga displacement *ketinggalan* sebesar ' $\phi$ ' radian terhadap *harga eksitasi* dari gaya tersebut. Artinya, apabila *siklus displacement maju sebesar ' $\phi$ ' radian*, maka periode dari siklus keduanya berharga nol atau maksimum *pada waktu yang sama*. Substitusi persamaan 3.26 kedalam persamaan 3.25 memberikan harga maksimum untuk solusi *steady state*  $x_p(t)$ . Dengan mensubstitusikan persamaan 3.6 ke dalam persamaan 3.4, maka harga konstanta ' $X$  dan ' $\phi$ ' diperoleh:

$$X \left[ (k - m\omega^2) \cos(\omega t - \phi) - c\omega \sin(\omega t - \phi) \right] = F_0 \cos \omega t \quad (3.27)$$

Dengan menggunakan hubungan trigonometri untuk cos-sin, yaitu:

$$-\cos(\omega t - \phi) = \cos \omega t \cos \phi + \sin \omega t \sin \phi$$

$$-\sin(\omega t - \phi) = \sin \omega t \cos \phi - \cos \omega t \sin \phi$$

Persamaan cos-sin ini diterapkan pada persamaan 3.27 dan hasil gabungan persamaan disederhanakan menjadi seperti berikut:

$$X \left[ (k - m\omega^2) \cos \phi + c\omega \sin \phi \right] = F_0$$

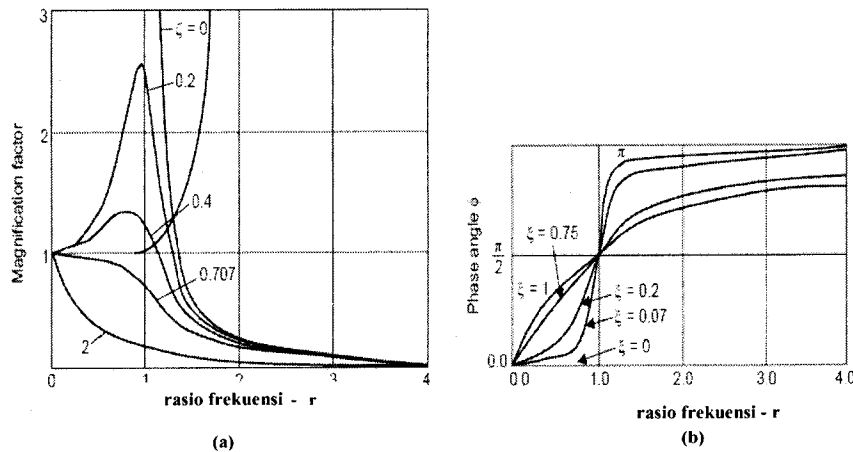
$$X \left[ (k - m\omega^2) \sin \phi - c\omega \cos \phi \right] = 0 \quad (3.28)$$

Jawaban untuk harga koefisien  $X$  dan  $\phi$  dari persamaan 3.28 diperoleh sebagai berikut:

$$X = \frac{F_0}{\left[ (k - m\omega^2)^2 + c^2 \omega^2 \right]^{1/2}} \quad (3.29)$$

dan

$$\phi = \tan^{-1} \left( \frac{c\omega}{k - m\omega^2} \right) \quad (3.30)$$



Gambar 3.10 Variasi 'X dan  $\phi$ ' dengan  $r$

Harga 'X' dan ' $\phi$ ' dari persamaan 3.29 dan persamaan 3.30 digunakan pada persamaan 3.26. Persamaan ini memberikan kurva sebagai solusi steady state persamaan getaran SDOF dengan asumsi eksitasi gaya dengan fungsi cosinus sederhana sesuai persamaan 3.25. Untuk menyatakan pertambahan faktor defleksi sebagai rasio antara defleksi getaran terhadap defleksi statik maka didefinisikan  $X/\delta_{st}$  sebagai *Magnification factor* atau diterjemahkan sebagai faktor aplikasi sebagai rasio amplitudo dengan notasi  $X/\delta_{st}$ . Rasio ini

disertakan sebagai fungsi dari rasio frekuensi dengan notasi  $r$ . Variasi  $X/\delta_{st}$  dan  $\phi$  dengan rasio frekuensi dan rasio redaman dengan notasi  $\zeta$  diperlihatkan pada Gambar 3.10. Gambar tersebut menunjukkan salah satu prestasi kinerja dalam evaluasi getaran, yaitu Kurva Frekuensi Respons. Secara lengkap persamaan MF dinyatakan dengan dua tahapan berikut:

**Pertama,**

Rumus dasar empat parameter getaran ditentukan, yaitu untuk:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{dan} \quad \zeta = \frac{c}{c_c}$$

$$\delta_{st} = \frac{F_0}{k} = \text{defleksi akibat gaya statik } F_0, \text{ dan}$$

$$r = \frac{\omega}{\omega_n} = \text{rasio frekuensi}$$

**Kedua,**

Dengan memasukkan parameter di atas pada persamaan 3.29 dan persamaan 3.30, maka persamaan lengkap MF atau Rasio Amplitudo dengan  $\phi$  diperoleh:

$$MF = \frac{X}{\delta_{st}} = \frac{1}{\left\{ \left[ 1 - \left( \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \right]^2 + \left[ 2\zeta \frac{\omega}{\omega_n} \right]^2 \right\}^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}} \quad (3.31)$$

dan

$$\phi = \tan^{-1} \left\{ \frac{2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \left( \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2} \right\} = \tan^{-1} \left( \frac{2\zeta r}{1 - r^2} \right) \quad (3.32)$$

Persamaan 3.31 dan persamaan 3.32 dengan dilengkapi tampilan Gambar 3.10 memberi penjelasan sebagai berikut:

1. Kurva dari sistem tak teredam, atau kurva dengan rasio redaman sama dengan nol, atau ' $\zeta=0$ ', dapat menunjukkan dua keadaan yaitu, bahwa sudut beda phase ' $\phi=0$ ' derajat dengan rasio frekuensi untuk  $r < 1$ , atau kondisi  $\phi=180$  derajat dicapai dengan  $r > 1$ .
2. SDOF dengan redaman merupakan idealisasi damper dengan 'harga c'. Redaman ini dapat mengurangi MF sehingga MF tidak mencapai berhingga untuk  $r = 1$  secara teoretik. Redaman memperkecil harga rasio amplitudo atau harga ' $X/\delta_{st}$ ' untuk semua harga frekuensi dari gaya eksitasi yang diterapkan.
3. Harga pengurangan rasio amplitudo pada atau dekat resonansi ini penting untuk menentukan harga c benda dengan cara hasil perhitungan teori ini dibandingkan dengan hasil plot MF dari percobaan. Suatu perangkat lunak evaluasi harga c dilakukan dengan bantuan statistik.
4. Getaran SDOF dengan redaman mempunyai amplitudo maksimum untuk harga 'r' dan ' $\omega$ ' yaitu:

$$r = \sqrt{1 - 2\zeta^2} \quad \text{dan} \quad \omega = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2} \quad (3.33)$$

Harga ' $\omega$ ' dari persamaan 3.33 menjadi lebih rendah daripada frekuensi natural tak teredam, atau harga ' $\omega_n$ '. Frekuensi ini disebut *Frekuensi Natural Teredam* dengan notasi ' $\omega_d$ ', dan:

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$$

Harga rasio amplitudo atau MF pada kondisi maksimum displacement atau 'X' dapat diperoleh untuk  $r = \sqrt{1 - 2\zeta^2}$  yaitu:

$$MF = \left( \frac{X}{\delta_{st}} \right)_{max} = \frac{1}{2\zeta \sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (3.34)$$

Harga 'X' pada kondisi ' $\omega = \omega_n$ ' menjadi:

$$\left( \frac{X}{\delta_{st}} \right)_{\omega=\omega_n} = \frac{1}{2\zeta} \quad (3.35)$$

5. Persamaan 3.34 dapat digunakan untuk menentukan redaman sistem secara eksperimental. Dalam pengujian getaran, jika respons amplitudo maksimum dengan notasi ' $X_{max}$ ' dapat diukur dan tercatat dari alat percobaan, rasio redaman sistem dapat ditentukan dengan persamaan 3.34. Sebaliknya, jika redaman diketahui maka getaran amplitudo maksimum dapat diestimasi.
6. Untuk kondisi ' $\zeta > 1/\sqrt{2}$ ' (idealisasi model getaran tanpa damper), grafik 'X' tidak memiliki puncak. Kondisi kedua dengan ' $\zeta = 0$ ' (yang berarti kondisi benda diam), terjadi diskontinu pada  $r = 1$ . Kedua kondisi ini merupakan penjelasan dari hasil perhitungan teori.
7. Harga sudut beda phase tergantung pada parameter sistem getaran yaitu, harga m, c, k, dan frekuensi gaya eksitasi  $\omega$ . Pengaruh empat karakteristik ini satu sama lain perlu diteliti untuk memastikan pilihan parameter terbaik untuk produk dengan syarat tanpa terjadi getaran. Sebagai contoh, getaran SDOF terjadi dan proporsional kasat mata dari displacement yang timbul. Terlihat jika nilai rasio frekuensi positif antara 0.1 sampai 0.9, maka rasio redaman dapat menyebabkan rasio frekuensi menjadi bilangan imajiner yaitu,  $2\zeta^2 < 0.99$  sampai  $2\zeta^2 < 0.19$ .
8. Apabila satu kondisi dengan harga 'r' tertentu memberikan sudut beda phase ' $\phi$ ' tertentu, memberikan *amplitudo dinamik* 'X' dari fungsi eksitasi gaya F(t) tertentu juga. Satu kondisi ini bersesuaian dengan satu kurva prestasi kinerja evaluasi getaran yaitu, *Kurva Respons Dinamik* yaitu x(t) untuk gaya eksitasi F(t) tertentu. Jika harga  $F_0$  diasumsikan relatif kecil, maka harga r *dianggap* kecil. Untuk harga r yang sangat besar, maka sudut beda phase mendekati harga 180 derajat, sehingga Kurva Respons Frekuensi pada frekuensi resonansi naik secara asytmot. Akibatnya, amplitudo getaran akan satu phase dengan gaya eksitasi. Jika kondisi dengan sudut beda phase untuk  $r \gg 1$ , maka sudut phase resonansi mendekati 90° untuk semua nilai redaman.
9. Kurva Respons Frekuensi merupakan kurva kinerja getaran dengan harga resonansi pada kondisi ( $\omega < \omega_n$ ). Sudut beda phase ' $\phi$ ' bertambah berbanding lurus dengan nilai redaman. Pertambahan redaman ini dalam kondisi riil, berarti pergantian sistem damper pada sistem SDOF dalam kondisi resonansi untuk ( $\omega > \omega_n$ ). Hal ini menyebabkan sudut beda phase berkurang.

Jadi displacement total SDOF dengan gaya eksitasi fungsi cosinus sederhana merupakan penjumlahan displacement dari persamaan transien ditambah displacement dari persamaan steady state. Persamaan displacement dari persamaan getaran satu derajat kebebasan untuk sistem dengan redaman yang dikenai eksitasi harmonik menjadi:

$$x(t) = X_0 e^{-\zeta \omega_n t} \cos(\omega_d t - \phi_0) + X \cos(\omega t - \phi) \quad (3.36)$$

dengan,  $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$ ,  $r = \frac{\omega}{\omega_n}$ , ' $X$  dan  $\phi$ ' mengikuti persamaan 3.31

dan persamaan 3.32. ' $X_0$  dan  $\phi_0$ ' dapat ditentukan dari kondisi awal. Penentuan kondisi awal yang baik berasal dari data realisasi getaran atau dari data percobaan.

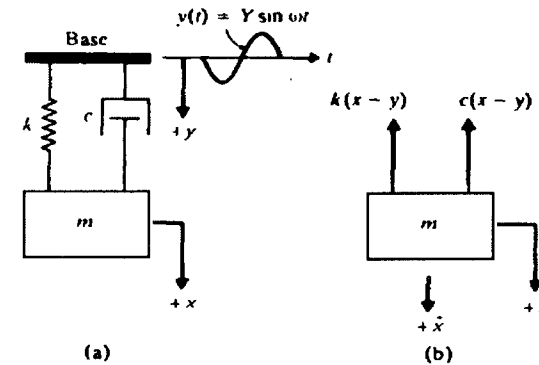
### 3.4 Respons SDOF dengan Eksitasi Harmonik Base

Berikut ini adalah SDOF getaran dengan input eksitasi dari pergerakan base, landasan, atau fondasi. Dua contoh sistem ini yaitu: gempa, dan mobil yang melaju pada gelombang jalan yang lumayan *keriting*. Untuk evaluasi sederhana dari bentuk kriting jalan atau bentuk goyangan landasan yang tidak menentu, analisis getaran ini diawali dari asumsi bentuk fungsi eksitasi dari gerakan base yang diasumsikan sebagai simpangan harmonik sederhana.

Pakar Fourier memberi solusi dengan menyatakan bahwa, bentuk eksitasi serumit apapun dapat dijabarkan sebagai sejumlah 'n' deret dalam bentuk dua kelompok fungsi harmonik, yaitu bentuk sinus dan cosinus. Sistem pegas-massa SDOF mengalami gerakan harmonik seperti dinyatakan sesuai Gambar 3.11. Jika  $y(t)$  dinotasikan sebagai displacement dari base (yang nantinya dapat dikonversi menjadi gaya) dan  $x(t)$  displacement dari massa dari posisi keseimbangan getaran SDOF pada waktu tertentu, yaitu 't' dalam detik, maka perpanjangan relatif pegas-damper ' $x-y$ ' dengan kecepatan relatif antara dua redaman adalah  $\dot{x} - \dot{y}$ , dan dengan mengikuti aturan diagram benda bebas (DBB). Dari Gambar 3.11, kita dapatkan persamaan getaran SDOF sebagai berikut:

$$m \ddot{x} + c(\dot{x} - \dot{y}) + k(x - y) = 0 \quad (3.37)$$

Gambar 3.11 dinyatakan terbalik, sebagai base seharusnya dibawah. Perpindahan arah  $y(t)$  memberi efek untuk kondisi turunan pertama dari  $y(t)$  tetapi tidak demikian halnya  $y(t)$  diberlakukan untuk turunan kedua.



Gambar 3.11 SDOF eksitasi dari displacement base

Sebagai langkah awal, asumsikan bentuk gangguan getaran base sebagai displacement harmonik dengan ' $y(t) = Y \sin \omega t$ '. Persamaan 3.37 menjadi:

$$m \ddot{x} + c \dot{x} + kx = A \sin \omega t + B \cos \omega t \quad (3.38)$$

Dalam hal ini,  $A = kY(t)$  dan  $B = c\omega Y(t)$ .

Asumsi persamaan getaran 3.38 ini, lebih baik dibanding pendekatan generalisasi fungsi base menurut deret Fourier. Parameter 'k dan c' diasumsikan mempunyai korelasi dengan displacement base, atau gerakan base dipengaruhi harga konstanta pegas dan damper benda di atasnya. Hal ini memperlihatkan bahwa displacement base atau landasan dapat diasumsikan ekuivalen terhadap displacement harmonik, seperti dinyatakan sesuai persamaan 3.38, yaitu gerakan base diasumsikan menjadi eksitasi gaya yang berkerja dengan besaran ' $kY \sin \omega t + c\omega Y \cos \omega t$ ' terhadap massa. Persamaan displacement steady state berikut ini diberlakukan untuk tinjauan gerakan benda, sehingga harga  $x_p(t)$  menyertakan beda phase hanya untuk ' $\phi_1$ '. Persamaan displacement dengan penurunan yang sama seperti yang dilakukan sebelumnya, diperoleh sebagai berikut:

$$x_p(t) = \frac{kY \sin(\omega t - \phi_1)}{\left[ (k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2 \right]^{1/2}} + \frac{c\omega Y \cos(\omega t - \phi_1)}{\left[ (k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2 \right]^{1/2}} \quad (3.39)$$

Sudut beda phase tergantung pada harga parameter sistem seperti 'm, c, k', dan frekuensi eksitasi 'ω'. Persamaan 3.39 dengan susunan yang identik persamaan stedy state dengan gaya eksitasi sederhana. Asumsi utama persamaan ini adalah bahwa getaran riil tidak menyebabkan terjadinya *separasi displacement* antara benda 'φ<sub>1</sub>' sebagai phase dan base 'φ<sub>2</sub>'. Asumsi ini dapat memunculkan analisis beda phase dari base dan dari benda. Persamaan tersebut menjadi:

$$x_p(t) \approx X \cos(\omega t - \phi_1 - \phi_2) \\ \cong Y \left[ \frac{k^2 + (c\omega)^2}{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2} \right]^{1/2} \cos(\omega t - \phi_1 - \phi_2) \quad (3.40)$$

Rasio dari amplitudo respons persamaan steady state atau 'x<sub>p</sub>(t)' terhadap gerakan landasan 'y(t)' diberikan oleh persamaan berikut ini:

$$\frac{X}{Y} = \left[ \frac{k^2 + (c\omega)^2}{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2} \right]^{1/2} = \left[ \frac{1 + (2\zeta r)^2}{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2} \right]^{1/2} \quad (3.41)$$

Sehingga persamaan untuk 'φ<sub>1</sub>' dan 'φ<sub>2</sub>' diperoleh sebagai berikut:

$$\phi_1 = \tan^{-1} \left( \frac{c\omega}{k - m\omega^2} \right) = \tan^{-1} \left( \frac{2\zeta r}{1 - r^2} \right) \\ \phi_2 = \tan^{-1} \left( \frac{k}{c\omega} \right) = \tan^{-1} \left( \frac{1}{2\zeta r} \right) \quad (3.42)$$

Rasio X/Y dalam pengertian hasil dari perhitungan teoretik adalah kemampuan benda mentransmisi perpindahan dari base. Dua kondisi ekstrem dapat terjadi, yaitu rasio sama dengan nol atau sama dengan satu sebagai berikut.

X/Y = 0 berarti sebesar apapun contour base maka tidak ada gangguan contour base terhadap displacement benda. Kondisi ini (x/y = 0) berarti sistem getaran benda dapat menyerap gangguan dari gerakan base, atau sistem tidak dapat mentransmisikan displacement base untuk benda.

Jika eksitasi harmonik sebagai perpindahan akibat landasan dinyatakan sebagai asumsi dalam bentuk base kompleks y(t) = Re ( Y e<sup>iωt</sup> ), maka respons displacement sistem SDOF menjadi:

$$x_p(t) = \text{Re} \left\{ \left( \frac{1 + i2\zeta r}{1 - r^2 + i2\zeta r} \right) Y e^{i\omega t} \right\}$$

Kemampuan mentransmisi displacement base asumsi harmonik sebagai:

$$\frac{X}{Y} = \left[ 1 + (2\zeta r)^2 \right]^{1/2} |H(i\omega)| \quad (3.43)$$

Dengan,

$$|H(i\omega)| = \left| \frac{kX}{F_0} \right| = \frac{1}{\left[ (1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2 \right]^{1/2}}$$

H(iω) dikenal sebagai frekuensi respons kompleks dari sistem.

Eksitasi sebagai gaya yang timbul dapat dihitung dari SDOF sistem pegas yang berhubungan dengan base, seperti ditunjukkan Gambar 3.11(b). Gaya tersebut merupakan gaya inersia yang bersesuaian sebagai eksitasi gaya pada sistem. Gaya tersebut diperoleh dari modifikasi persamaan dasar getaran, sebagai berikut:

$$F = k(x - y) + c \left( \dot{x} - \dot{y} \right) = -m \ddot{x} \quad (3.44)$$

Gabungan dari persamaan 3.40 dan persamaan 3.44 menghasilkan persamaan getaran SDOF yang ditulis sebagai berikut:

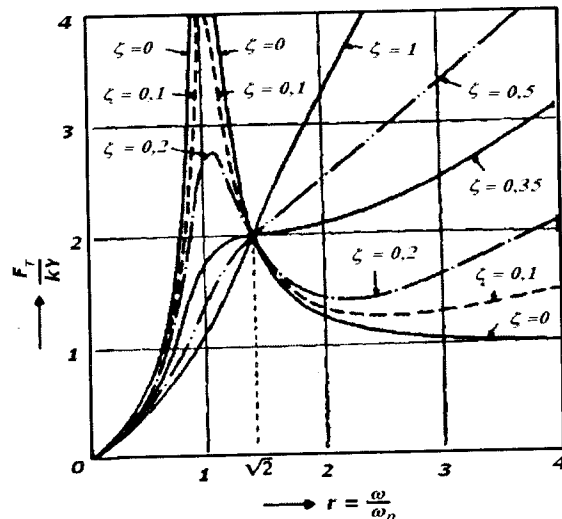
$$F = m\omega^2 X \cos(\omega t - \phi_1 - \phi_2) = F_T \cos(\omega t - \phi_1 - \phi_2) \quad (3.45)$$

Gaya inersia sama dengan eksitasi, sehingga gaya ini dapat dinyatakan dalam bentuk harmonik sederhana cosinus. 'F<sub>T</sub>' adalah identik sebagai amplitudo dari harga maksimum eksitasi yang dihasilkan oleh persamaan berikut:

$$\frac{F_T}{kY} = r^2 \left[ \frac{1 + (2\zeta r)^2}{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2} \right]^{1/2} \quad (3.46)$$

Rasio ' $F_T/kY$ ' menyatakan kemampuan benda memindahkan atau mentransmisikan eksitasi gaya dari displacement base ke benda. Istilah transmisi ini menyebabkan gaya dari displacement base disebut sebagai gaya transmisi, selain juga disebut sebagai gaya inersia dan eksitasi gaya. Perlu dicatat bahwa gaya transmisi ini satu phase dengan gerakan massa  $x(t)$ , sesuai syarat koneksi benda dengan landasan, dan sesuai syarat gerakan gaya inersia. Variasi dari gaya yang ditransmisikan ke landasan dengan frekuensi rasio dinyatakan seperti dalam Gambar 3.12. Beberapa nilai ' $\zeta$ ' dan ' $z = x - y$ ' menyatakan gerakan relatif massa-landasan, sehingga:

$$m \ddot{z} + c \dot{z} + kz = -m \ddot{y} = m\omega^2 Y \sin \omega t \quad (3.47)$$



Gambar 3.12 Kurva respons frekuensi getaran SDOF base

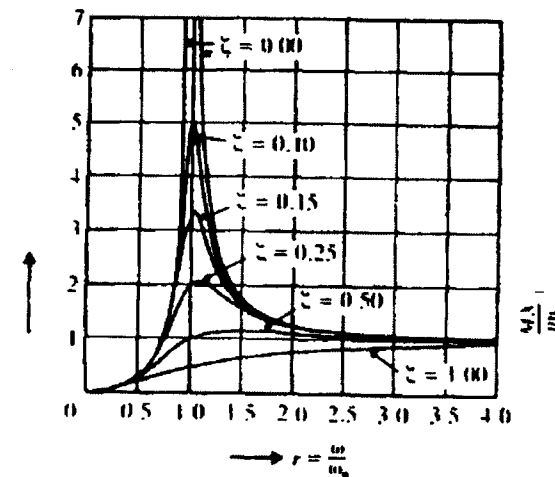
Persamaan steady state dinyatakan dalam  $z(t)$  menjadi:

$$z(t) = \frac{m\omega^2 Y \sin(\omega t - \phi_1)}{\left[ (k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2 \right]^{1/2}} = Z \sin(\omega t - \phi_1)$$

Konstanta baru muncul dari persamaan 3.47, yaitu  $Z_{in}$ . Konstanta ini merupakan fungsi dari  $m$ ,  $c$ ,  $k$ , dan  $y(t)$ , serta frekuensi base. Dalam bentuk lain, untuk memunculkan displacement base sebagai  $y(t)$ , maka  $z$  adalah amplitudo  $z(t)$  yang dapat diekspresikan sebagai:

$$z(t) = \frac{m\omega^2 Y}{\left[ (k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2 \right]^{1/2}} = Y \frac{r^2}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2}} \quad (3.48)$$

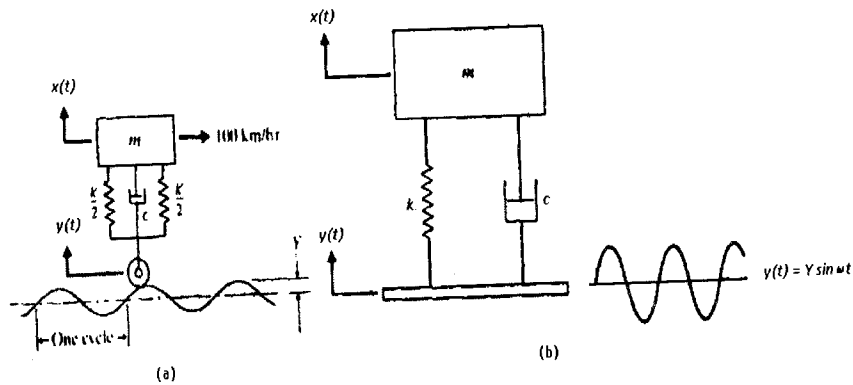
$Y$ , atau dinyatakan sebagai  $y(t)$ , merupakan displacement dari base dan umumnya  $y(t)$  dapat diketahui dari percobaan atau pemberian syarat batas yang diasumsikan. Sudut beda phase benda ' $\phi_1$ ' ditentukan dengan persamaan 3.42, dan rasio  $Z/Y$  dapat ditunjukkan dengan kurva pada Gambar 3.13. Besar pergerakan displacement  $z(t)$  menjadi ukuran terhadap gangguan eksitasi dari displacement base, yaitu  $y(t)$ . Hal ini dinyatakan dengan rasio  $z(t) / y(t)$ . ' $\zeta$ ' merupakan parameter rasio frekuensi, yaitu perbandingan antara frekuensi dari displacement eksitasi terhadap harga frekuensi pribadi sistem SDOF.



Gambar 3.13 Variasi  $Z/Y$  terhadap frekuensi rasio

### Contoh 3.1

Idealisasi SDOF dapat berasal dari sebuah mobil. Sesuai tujuan analisis, kita akan mengamati respons getaran terhadap gerakan vertikal mobil. Gambar 3.14(a) menunjukkan model SDOF kendaraan bermotor yang bergetar dalam arah vertikal ketika melintasi jalan bergelombang.



Gambar 3.14 Gerakan vertikal mobil eksitasi displacement jalan

**Diketahui:** Massa mobil 1200 kg dengan sistem suspensi pegas dan damper dari empat lokasi roda diekuivalenkan memiliki konstanta pegas 400 kN/m dan rasio redaman  $\zeta = 0.5$ . Kecepatan mobil 100 km/jam. Permukaan jalan sinusoidal dengan amplitudo maksimum  $Y = 0.05$  m dengan panjang gelombang 6 m.

**Tentukan:** Amplitudo dari kendaraan.

**Solusi:** Frekuensi  $\omega$  dari eksitasi landasan dapat ditemukan dengan membagi kecepatan kendaraan dengan panjang satu siklus kekasaran permukaan.

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \left( \frac{100 \times 1000}{3600} \right) \frac{1}{6} = 29,09 \text{ rad/detik}$$

Frekuensi natural kendaraan ditentukan dengan persamaan berikut:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\left( \frac{400 \times 10^3}{1200} \right)} = 18,26 \text{ rad/detik}$$

Sehingga rasio frekuensi adalah:

$$r = \frac{\omega}{\omega_n} = \frac{29,09}{18,26} = 1,593$$

Rasio amplitudo ditentukan dengan persamaan 3.41, diperoleh:

$$\frac{X}{Y} = \left[ \frac{1 + (2\zeta r)^2}{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2} \right]^{1/2} = \left[ \frac{1 + (2 \times 0,5 \times 1,593)^2}{(1 - 1,593^2)^2 + (2 \times 0,5 \times 1,593)^2} \right]^{1/2} = 0,8493$$

sehingga amplitudo kendaraan adalah:

$$X = 0,8493 \quad Y = 0,8493(0,05) = 0,0425 \text{ m}$$

### Contoh 3.3

Sebuah mesin dengan beban berat 3000 N ditumpu oleh fondasi resilient. Fondasi resilient berarti antara fondasi dan mesin terdapat sekat berupa peredam dan disambung dengan baut. Displacement akibat beban berat mesin ini seharga 7,5 cm. Operasional mesin menyebabkan amplitudo mesin bergetar sebesar 1 cm saat landasan dari fondasi mesin mendapat eksitasi asumsi dengan gaya harmonik dan menimbulkan frekuensi natural untuk idealisasi SDOF tak teredam dari base dengan amplitudo 0,25 cm.

**Tentukan:** Konstanta redaman dari fondasi,  
Amplitudo eksitasi gaya maksimum akibat base,  
Amplitudo displacement dari mesin relatif terhadap landasan.

**Jawab:** Dengan yang diketahui,  $W = 3000$  N,  $\delta_{st} = 7,5$  cm,  $X = 1$  cm, dan  $y(t) = 0.25 \sin \omega_n t$  cm (kondisi resonansi)

**Ditanya :** c, F, dan Z

**Solusi:** Kekakuan fondasi ditentukan oleh persamaan berikut:

$$k = W / \delta_{st} = 3000 / 7,5 = 40.000 \text{ N / m}$$

Kondisi resonansi  $\omega = \omega_n$ , atau  $r = 1$  sehingga persamaan 3.41 menjadi:

$$\frac{X}{Y} = \frac{0,01}{0,0025} = 4 = \left[ \frac{1 + (2\zeta)^2}{(2\zeta)^2} \right]^{1/2}$$

$$\zeta = 0,1291$$

Konstanta redaman diperoleh dengan persamaan:

$$c = \zeta 2\sqrt{km} = 2 \times 0,1291 \times \sqrt{40.000 \times \left(\frac{3000}{9,81}\right)} = 903,051 \text{ Ns/m}$$

Amplitudo eksitasi gaya base atau gaya dinamik pada landasan di mana 'r = 1' diperoleh dari persamaan 3.46:

$$F_T = kY = kX = 40.000 \times 0,01 = 400 \text{ N}$$

Perpindahan amplitudo relatif dari mesin pada 'r = 1' dapat diperoleh dari persamaan 3.48 menjadi:

$$Z = \frac{Y}{2\zeta} = \frac{0,0025}{2 \times 0,1291} = 0,00968 \text{ m}$$

Dengan harga X-Y sama dengan 0.75 dan amplitudo relatif tidak sama dengan Z, atau  $Z \neq X-Y$ . Hal ini menunjukkan adanya perbedaan phase antara x, y dan z.

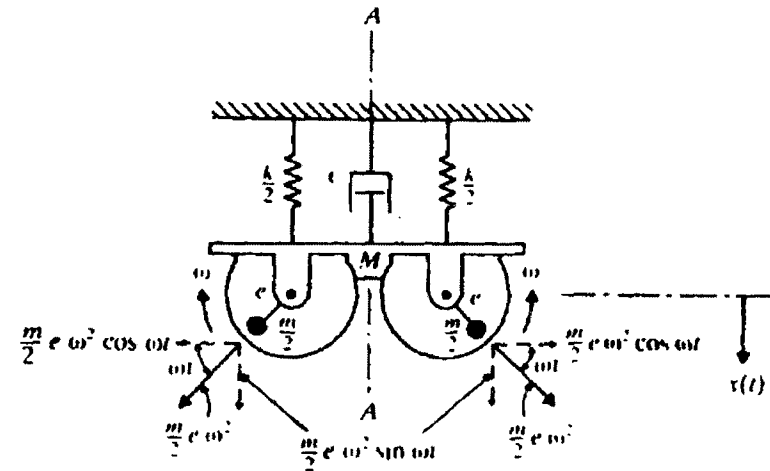
### 3.5 SDOF Tereadam dengan Eksitasi dari Mesin Tidak Balance

Setiap benda berputar akan menimbulkan gaya inersia yang juga berputar. Apabila putaran tersebut adalah torak-engkol mesin dan torak-engkol merupakan benda tidak simetri, maka akan menimbulkan kondisi tidak balance, atau kondisi di mana terjadi putaran dengan disertai gerakan tersentak-sentak. Akibatnya, putaran menjadi tak dapat menunjukkan kecepatan putar kontinu. Yang terjadi pada kondisi riil, putaran tak seimbang ini tidak dapat dihilangkan. Kondisi tidak balance merupakan jenis eksitasi berupa gaya pada bagian penyanggah mesin (frame atau rumah mesin), seperti pada model sederhana yang dapat dilihat pada Gambar 3.15.

Masa penyanggah ini dapat merupakan atau berasal dari mesin lain, semisal dengan total massa dari mesin yang sama dan dengan notasi M. Dua massa eksentrik diasumsikan dengan harga 'm / 2'. Alasan setiap massa putar bermassa m/2 untuk penye-derhanaan persamaan getaran. Jika kelompok massa putar ada tiga maka massa masing-masing adalah m/3 dan seterusnya.  $v(t)$  merupakan displacement dari frame dan berputar dengan arah berlawanan jam dengan ' $\omega$ '. Eksitasi gaya sebagai resultante gaya sentrifugal

dinyatakan dengan rumus ' $m e \omega^2 / 2$ ', dalam hal ini 'e' adalah bilangan epsilon. Akibat putaran kedua massa tersebut, eksitasi gaya pada massa total dengan notasi M tersebut timbul. Dua massa yang sama saling berputar berlawanan arah satu sama lain itu menimbulkan kompensasi gaya arah horizontal yang dapat saling meniadakan. Namun demikian jumlah komponen vertikalnya menyebabkan gaya eksitasi yang bekerja di sepanjang sumbu A-A, sesuai Gambar 3.15. Jika posisi angular massa diukur dari posisi horizontal, total komponen vertikal dari eksitasi biasa diberikan dengan rumus gaya sentrifugal yaitu,  $F(t) = m e \omega^2 \sin \omega t$ . Persamaan getaran SDOF mesin penyanggah beban gaya eksitasi dari putaran tidak balance menjadi:

$$M \ddot{x} + c \dot{x} + kx = m e \omega^2 \sin \omega t \quad (3.49)$$



Gambar 3.15 Penyanggah massa putar tidak balance

Hasil dari persamaan SDOF sebagai persamaan steady state persamaan 3.49 ini adalah sebagai berikut:

$$x_p(t) = X \sin(\omega t - \phi) = \text{Im} \left[ \frac{m e \left( \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2}{M} |H(i\omega)| e^{i(\omega t - \phi)} \right] \quad (3.50)$$

Dengan ' $\omega_n = \sqrt{k/M}$ ', 'X', dan ' $\phi$ ' menunjukkan amplitudo dan sudut phase dari getaran dengan persamaan sebagai berikut:



$$X = \left[ \frac{m e \omega^2}{(k - m \omega^2)^2 + (c \omega)^2} \right]^{1/2} = \frac{m e}{M} \left( \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 |H(i\omega)| \quad (3.51)$$

$$\phi_1 = \tan^{-1} \left( \frac{c \omega}{k - M \omega^2} \right) \quad (3.52)$$

Sudut beda phase, ' $\phi_1$ ', dapat didefinisikan dalam parameter lain, yaitu dengan ' $\zeta = c/c_c$ ' dan ' $c_c = 2M\omega_n$ '. Dengan demikian persamaan 3.51 dan persamaan 3.52 dapat ditulis ulang menjadi:

$$\frac{MX}{me} = \frac{r^2}{\left[ (1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2 \right]^{1/2}} = r^2 |H(i\omega)| \quad (3.53)$$

Sehingga diperoleh:

$$\phi_1 = \tan^{-1} \left( \frac{2\zeta r}{1 - r^2} \right)$$

Variasi harga numerik dari ' $MX/me$ ' dengan variasi ' $r$ ' untuk harga ' $\zeta$ ' yang berbeda ditunjukkan identik seperti pada Gambar 3.13. Harga fungsi  $MX/me$  dinyatakan sebelah kanan kurva. Dengan kata lain, kurva dari ' $\phi_1$ ' terhadap ' $r$ ' seperti tampak pada Gambar 3.19(b). Berikut ini pengamatan yang dibuat dari persamaan 3.53, yaitu:

1. Semua kurva dimulai dari amplitudo nol. Resonansi ditandai oleh pengaruh redaman. Jika mesin bekerja pada daerah resonansi ini, redaman berperan untuk menghindari terjadinya amplitudo sangat besar yang dapat menjadi berbahaya.
2. Pada kecepatan dengan harga  $\omega$  yang sangat tinggi,  $MX/me$  umumnya menjadi berharga sama dengan satu, dan pengaruh dari seberapa besar harga redaman sudah dapat diabaikan.
3. Maksimum  $MX/me$  terjadi dalam kondisi seperti berikut:

$$\frac{d}{dr} \left( \frac{MX}{me} \right) = 0 \quad (3.55)$$

Maka jawab dari persamaan 3.55 menunjukkan harga ' $r$ ' sama dengan:

$$r = \frac{1}{\sqrt{1 - 2\zeta^2}} > 1$$

Mengacu pada persamaan di atas, puncak resonansi terjadi pada posisi di sebelah kanan dari nilai resonansi ' $r = 1$ '.

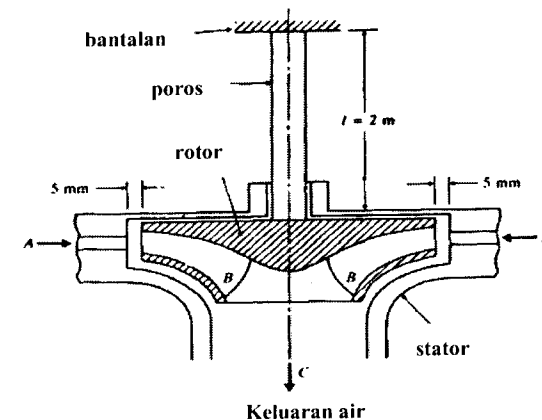
### Contoh 3.4

Sebuah skema dari turbin Francis seperti tercantum dalam Gambar 3.16 dengan aliran air masuk turbin dari A ke B menuju *tail race* yang berlokasi di C. Rotor turbin memiliki massa 250 kg dan efek putaran turbin menyebabkan torsi tak seimbang sebesar 5 kg.mm. Jarak sisa radial antara rotor dan stator 5 mm. Turbin beroperasi dengan kecepatan 600 rpm sampai 6000 rpm. Poros baja rotor dapat diasumsikan terletak pada bearing.

**Tentukan:** Diameter poros hingga rotor tidak menyentuh stator pada rentang putaran operasi turbin. Asumsikan redaman diabaikan.

**Jawab:** Diketahui  $M = 250$  kg,  $me = 5$  kg.mm,  $n = 600$ -6000 rpm, dan  $\delta_r = 5$  mm

**Ditanya:** diameter poros rotor Amplitudo maksimum dari rotor akibat gaya eksitasi tak balance diperoleh dari persamaan 3.51 dengan  $c = 0$  sebagai berikut:



Gambar 3.16 Rotating unbalanced masses

$$X = \frac{m\epsilon\omega^2}{(k - M\omega^2)^2} = \frac{m\epsilon\omega^2}{k(1 - r^2)}$$

Harga ' $\omega$ ' dalam rentang  $600 \text{ rpm} = 600 \times \frac{2\pi}{60} = 20\pi \text{ rad/detik}$ ,

kemudian sampai  $6000 \text{ rpm} = 6000 \times \frac{2\pi}{60} = 200\pi \text{ rad/detik}$ .

Frekuensi natural yaitu:  $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{M}} = \sqrt{\frac{k}{250}} = 0,0625\sqrt{k} \text{ rad/detik}$

'k' dinyatakan dalam satuan N/m dan untuk  $\omega = 20 \text{ rad/detik}$  maka k dapat ditentukan sebagai berikut:

$$0,005 = \frac{(5 \times 10^{-3}) \times (20\pi)}{k \left[ 1 - \frac{(20\pi)^2}{0,004k} \right]} = \frac{2\pi^2}{k - 10^5 \pi^2}$$

$$k = 10,04 \times 10^6 \pi^2 \text{ N/m}$$

Amplitudo getaran dari poros penyangga turbin yang berputar dapat diminimalkan dengan membuat harga  $r$  sangat besar. Sebagai konsekuensinya,  $\omega_n$  harus dibuat kecil dan lebih kecil daripada harga  $\omega$ . Poros turbin merupakan batang cantilever dengan tumpuan jepit sederhana sehingga konstanta kekakuan cantilever dinyatakan lewat persamaan displacement berikut:

$$k = \frac{3EI}{l^3} = \frac{3E}{l^3} \left( \frac{\pi d^4}{64} \right)$$

Maka harga diameter batang poros rotor dapat dihitung dari harga  $k$  yang sudah diketahui sebelumnya, yaitu:

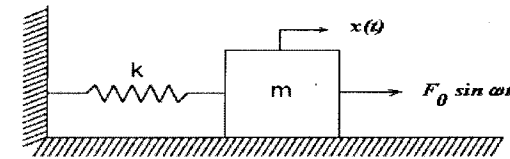
$$d^4 = \frac{64kl^3}{3\pi E} = \frac{(64)(10,04 \times 10^6 \pi^2)(2)^3}{3\pi \times (2,07 \times 10^{12})} = 2,6005 \times 10^4 \text{ m}^4$$

$$d = 0,127 \text{ m} = 127 \text{ mm}$$

### 3.6 SDOF Teredam oleh Coulomb Damping

Setiap gesekan dari getaran benda selalu menimbulkan sifat redaman dari gaya gesek tersebut. Sifat redaman ini secara umum disebut sebagai redaman oleh Coulomb Damping. Contoh dalam sub bab ini adalah eksitasi gaya SDOF dengan pendekatan harmonik sederhana berbentuk sinus. Sifat redaman getaran dinyatakan sebagai gaya gesek yang sama dengan perkalian koefisien gesek dengan gaya normal yang terjadi. SDOF dengan coulomb damping diasumsikan sebagai gaya harmonik  $F(t) = F_0 \sin \omega t$  seperti yang terlihat pada Gambar 3.17. Sehingga persamaan getaran SDOF dinyatakan sebagai berikut:

$$m\ddot{x} + kx \pm \mu N = F(t) = F_0 \sin \omega t \quad (3.56)$$



Gambar 3.17 SDOF dengan Coulomb Damping dan Eksitasi Gaya

Tanda pada gaya gesek, apakah positif atau negatif tergantung arah gerakan dari massa, apakah ke kiri atau ke kanan. Jawab persoalan ini secara teori atau eksak dari persamaan 3.56 dapat diperoleh dengan syarat jika gaya gesek *lebih kecil* daripada gaya eksitasi ( $F_0$ ). Sehingga jawaban menjadi dalam kondisi displacement mendekati getaran harmonik. Dalam kasus ini kita dapat menghitung persamaan getaran sebagai persamaan diferensial dari persamaan 3.56 dengan menemukan rasio ekuivalen viscous damping, dengan *hukum kekekalan energi*, yaitu energi yang hilang akibat gaya gesek sama dengan energi yang diserap pada redaman viscous untuk satu siklus sempurna. Asumsi satu siklus motor bakar sempurna dan sebagai contoh adalah motor siklus-4 langkah. Peran gesekan terjadi pada seperempat bagian dari satu siklus tersebut. Jika amplitudo gerakan adalah  $X$ , maka energi yang hilang oleh gaya gesek  $\mu N$  adalah seperempat siklus dari gerakan torak sistem-4 langkah dari kondisi ideal yaitu  $\mu NX$ . Dalam satu siklus penuh, energi yang hilang akibat gaya gesek adalah:

$$\Delta W = 4\mu NX \quad (3.57)$$

Jika konstanta ekuivalen viscous damping dinyatakan dengan  $c_{eq}$ , maka energi yang terdisipasi akibat gesekan selama satu siklus penuh adalah:

$$\Delta W = \pi c_{eq} \omega X^2 \quad (3.58)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan 3.58 ke persamaan 3.57 diperoleh konstanta ekuivalen viscous damping dan konstanta amplitudo displacement steady state, yaitu:

$$c_{eq} = \frac{4\mu N}{\pi \omega X} \quad (3.59)$$

$$x_p(t) = X \sin(\omega t - \phi) \quad (3.60)$$

$$X = \frac{F_0}{\left[ (k - m\omega^2)^2 + (c_{eq}\omega)^2 \right]^{1/2}} = \frac{(F_0/k)}{\left[ \left( 1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right)^2 + \left( 2\zeta_{eq} \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \right]^{1/2}} \quad (3.61)$$

Rasio redaman ekuivalen menjadi persamaan berikut:

$$\zeta_{eq} = \frac{c_{eq}}{c_c} = \frac{c_{eq}}{2m\omega_n} = \frac{4\mu N}{2m\omega_n \pi \omega X} = \frac{2\mu N}{\pi m \omega \omega_n X} \quad (3.62)$$

Konstanta amplitudo displacement steady state dinyatakan dalam rasio frekuensi dan gaya viscous damping yang dilakukan dengan mensubstitusikan persamaan 3.62 kedalam persamaan 3.61. Hasilnya adalah:

$$X = \frac{(F_0/k)}{\left[ \left( 1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right)^2 + \left( \frac{4\mu N}{\mu k N} \right)^2 \right]^{1/2}} \quad (3.63)$$

atau

$$X = (F_0/k) \left[ \frac{1 - \left( \frac{4\mu N}{\pi k N} \right)^2}{\left( 1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right)^2} \right]^{1/2} \quad (3.64)$$

Operasional persamaan 3.64 dapat memberikan harga gaya gesek kecil sekali dibanding  $F_0$  dari eksitasi gaya. Batasan harga dari gaya gesek  $\mu N$  dapat ditentukan untuk menghindari nilai imajiner dari  $X$ . Kita perlu memiliki batasan, yaitu:

$$1 - \left( \frac{4\mu N}{\pi k N} \right)^2 > 0 \quad \text{atau} \quad \frac{F_0}{\mu N} > \frac{4}{\pi} \quad (3.65)$$

Sudut beda phase ' $\phi_1$ ' diperoleh seperti halnya kondisi eksitasi asumsi gaya harmonik sederhana dengan persamaan berikut ini:

$$\phi_1 = \tan^{-1} \left( \frac{c_{eq}\omega}{k - m\omega^2} \right) = \tan^{-1} \left( \frac{\frac{4\mu N}{\pi k X}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}} \right) \quad (3.66)$$

Atau sudut beda phase dinyatakan dalam gaya gesek dari coulomb damping dengan mensubstitusikan persamaan 3.65 kedalam persamaan 3.66 sehingga diperoleh:

$$\phi_1 = \tan^{-1} \left( \frac{\pm \frac{4\mu N}{\pi F_0}}{\sqrt{1 - \left( \frac{4\mu N}{\pi F_0} \right)^2}} \right) \quad (3.67)$$

### Contoh 3.5

Sebuah sistem pegas-massa SDOF tanpa damper dengan permukaan gesek, sehingga SDOF ini dapat diasumsikan mendapat tahanan coulomb damping. SDOF diidealisasikan dengan massa 10 kg dan konstanta pegas 4000 N/m, bergetar horizontal. Jika koefisien gesek 0,12 dan frekuensi dari eksitasi gaya yang timbul adalah 2 Hz, maka dengan amplitudo 40 mm, tentukan amplitudo maksimum eksitasi dari ' $F_0$ '.

**Jawab:**

Jika  $m = 10 \text{ kg}$ ,  $k = 4000 \text{ N/m}$ ,  $\mu = 0,12$ , dan  $\omega = 2 \text{ Hz}$  maka,

Frekuensi pribadi dengan:  $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{4000}{10}} = 20 \text{ rad/det.}$

Frekuensi rasio diperoleh:  $\zeta = \frac{\omega}{\omega_n} = \frac{2 \times 2\pi}{20} = 0,6283$

Amplitudo getaran dan eksitasi gaya maksimum dihitung mengikuti persamaan 3.64 dan persamaan 3.65, sehingga:

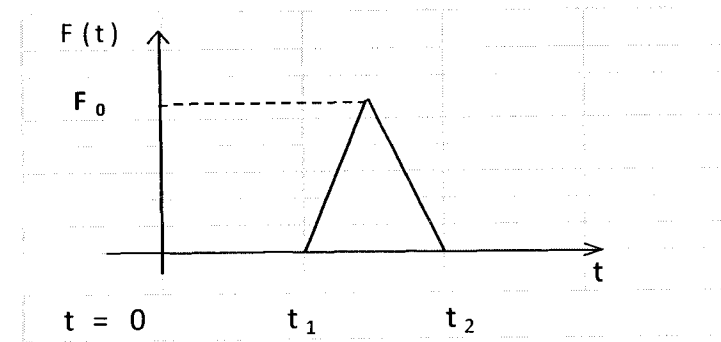
$$X = (F_0/k) \left[ \frac{1 - \left( \frac{4\mu N}{\pi F_0} \right)^2}{\left( 1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right)^2} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$0,04 = \frac{F_0}{4000} \left[ \frac{1 - \left( \frac{4(0,12)(98,1)}{\pi F_0} \right)^2}{\left( 1 - (0,6283)^2 \right)^2} \right]^{\frac{1}{2}}$$

Diperoleh  $F_0 = 97,9874 \text{ N}$

### 3.7 SDOF Eksitasi Beban Impuls

*Beban impuls* atau beban kejutan dapat terjadi pada benda menimbulkan getaran benda meskipun beban sudah tidak bekerja. Kondisi krusial atau kritis getaran ini adalah efek displacement maksimum yang timbul akibat benturan benda. Efek ini harus ditentukan tetap dalam kondisi aman dari kemungkinan kerusakan benda. Asumsi beban impact menjadi eksitasi dapat dilakukan dengan asumsi bahwa beban impact bekerja dalam waktu tertentu, misalnya antara  $t_1$  sampai  $t_2$  dengan range waktu ini maksimal 0.1 detik. Puncak gaya impact dinotasikan dengan  $F_0$ , dan  $F_0$  dapat diamati dari Gambar 3.18 berikut ini.



**Gambar 3.18** Asumsi Beban Impact Sebagai Eksitasi

Gambaran beban impuls menjadi eksitasi gaya dari SDOF dengan persamaan getaran sebagai berikut:

$$m \ddot{x} + kx \pm \mu N = F(t) \quad \text{untuk } t_1 < t < t_2$$

$$m \ddot{x} + kx \pm \mu N = 0, \quad \text{untuk } t_0 < t \leq t_1 \quad (3.68)$$

$t_2 \leq t < t_{\text{tak hingga}}$

Data percobaan atau asumsi untuk harga awal, misalnya kondisi  $t = \text{nol}$ . Umumnya kondisi awal ini tidak diberikan dengan harga kecepatan atau percepatan diberi harga sama dengan nol karena riil harga sangat kecil sekali. Selang waktu untuk  $t_0$  sampai  $t_1$  dan phase waktu antara  $t_2$  sampai  $t$  tertentu, berlaku SDOF phase dengan solusi displacement transien. Salah satu dari tiga solusi transien itu kita ambil, misalnya sebagai berikut:

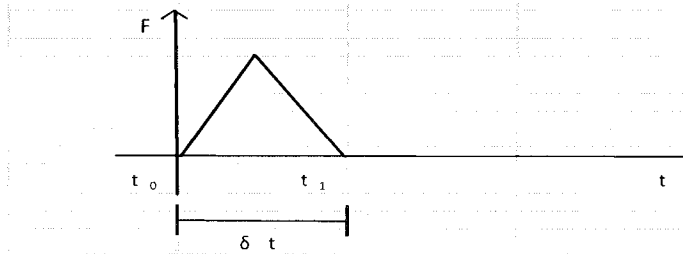
$$x_1(t) = e^{-\zeta \omega_n(t)} (C_1 \cos \omega_d(t) + C_2 \sin \omega_d(t)) \quad (2.33b)$$

Berikut ini contoh kondisi awal dengan diberikan harga simpangan awal dengan  $x_0$  dan kecepatan pada  $t = t_0$  memberikan tiga kondisi berikut:

1. **Pada kondisi  $t_0 < t \leq t_1$ .**

Dengan memasukkan syarat awal ini dalam persamaan 2.33b dan mendefinisikan frekuensi rasio  $\zeta$  dan rasio redaman  $r$ , maka persamaan getaran transien menjadi seperti berikut:

$$x_1(t) = e^{-\zeta \omega_n(t)} (C_1 \cos \omega_d(t) + r \zeta \sin \omega_d(t)) \quad (3.69)$$



Gambar 3.19 Asumsi delta waktu impact sebesar  $\delta t$

2. **Pada kondisi  $t_1 < t < t_2$**

Pada kondisi ini selisih dari  $t_2$  dan  $t_1$  dianggap dengan waktu sangat pendek, sehingga diasumsikan sebagai  $\delta t$ , atau *short duration time* dari  $F(t)$ . Data  $\delta t$  dalam pendekatan sederhana tidak diperlukan, tetapi untuk ketelitian dan kondisi waktu ini, yang dapat teramat cukup lama dari simulasi pembebanan atau asumsi, maka diperlukan prosedur perhitungan tersendiri. Berikut ini contoh sederhana dengan pengabaian waktu tumbukan atau waktu tumbukan diasumsikan sangat singkat, sehingga kondisi persamaan getarannya menjadi:

$$m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = I \quad (3.70)$$

$$I = F_0 \delta t \text{ (impuls)}$$

3. **Pada kondisi  $t_2 \leq t$  atau era transien**

Kondisi batas mengikuti pernyataan sebelumnya,  $\frac{d^2 x(t)}{dt^2} = I/m$  dan  $x(t_3) = 0$ . Pada posisi  $t_3$  pasca impact, gerakan benda mengubah arah sehingga kecepatan dan percepatannya sama dengan nol. Persamaan getaran phase ke-3 ini mengikuti persamaan SDOF tanpa gaya eksitasi seperti berikut:

$$m \ddot{x} + c \dot{x} + k x = 0$$

Jawab persamaan steady state menjadi:

$$x_1(t) = \frac{1}{m \omega_d} e^{-\zeta \omega_n (t-t_1)} \sin(\omega_d t - \phi) \quad (3.71)$$

dengan  $\phi_1 = \omega_d t_1 - n \pi$ ,  $n$  merupakan jumlah periode yang terjadi selama  $t=0$  sampai  $t_1$ .

Contoh aplikasi beban impact adalah desain ledakan gedung bertingkat dalam upaya untuk menciptakan ledakan dengan efek peluruhan bangunan

yang mengarah ke bawah. Melokalisir kerusakan merupakan pengembangan penerapan getaran dengan eksitasi impact. Displacement akibat ledakan atau beban impact diatur untuk tidak terlalu besar dan dalam arah yang terkontrol.

### 3.8 SDOF Eksitasi Deret Fourier

Beban riil getaran mempunyai amplitudo, frekuensi, serta periode acak. Beban riil tersebut dapat dijabarkan dalam bentuk pertambahan deret. Pakar yang menyampaikan hal ini adalah *Fourier*. Berikut ini empat contoh variasi deret Fourier yang disampaikan sebagai alternatif pemberian gaya eksitasi dari turunan atau ekuivalensi terhadap eksitasi gaya riil, yaitu:

1. Eksitasi gaya harmonik sederhana

Eksitasi harmonik sederhana dapat dijadikan sebagai deret dan masing-masing bilangan pada deret dengan rumus harmonik sin atau cos mempunyai koefisien. Penentuan koefisien ini dapat dilakukan dengan iterasi sesuai urutan numerik sedemikian rupa sehingga hasil komputasi total  $F(t)$  mendekati pendekatan riil  $F(t)$  dari asumsi, atau dari pencatatan riil, atau dari hasil percobaan. Seberapa besar harga ' $n$ ' yang dipilih tergantung pada seberapa teliti hasil prestasi getaran yang kita inginkan. Persamaan asumsi  $F(t)$  adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} F(t) = & a_0 + a_1 \cos \omega_d t \\ & + a_2 \cos 2\omega_d t + a_3 \cos 3\omega_d t + \dots + a_n \cos n\omega_d t + \dots + b_1 \sin \omega_d t \\ & + b_2 \sin 2\omega_d t + b_3 \sin 3\omega_d t + \dots + b_n \sin n\omega_d t + \dots \end{aligned} \quad (3.72)$$

Persamaan 3.72 dapat ditulis dalam bentuk lain seperti berikut:

$$F(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_d t + b_n \sin n\omega_d t) \quad (3.73)$$

Harga koefisien  $a_0$ ,  $a_n$ , dan  $b_n$  dapat ditentukan dengan masih melibatkan asumsi fungsi periode dalam integrasi waktu tertentu. Ciri fungsi periodik ini harus kontinu. Ketiga koefisien ini dinyatakan sebagai berikut:

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} F(t) dt \quad (3.74a)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} F(t) \cos n\omega_d t dt \quad (3.74b)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} F(t) \sin n\omega_d t dt \quad (3.74c)$$

## 2. Eksitasi dari gaya asumsi fungsi step periodik

Eksitasi gaya total berikut ini dinyatakan untuk bentuk asumsi fungsi harmonik sin-cos seperti sebelumnya, tetapi fungsi asumsi  $a_n$ ,  $a_n$ , dan  $b_n$ , menggunakan *fungsi step*. Bentuk fungsi gaya eksitasi total ini menjadi berbeda, yaitu:

$$y(t) = \frac{a_0}{k} + \frac{1}{k} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{a_n 2r_n \xi + b_n (1 - r_n^2)}{(1 - r_n^2)^2 + (2r_n \xi)^2} \sin n\omega_d t + \frac{a_n (1 - r_n^2) - b_n 2r_n \xi}{(1 - r_n^2)^2 + (2r_n \xi)^2} \cos n\omega_d t \right) \quad (3.75)$$

Sebagai contoh adalah bentuk step fungsi dengan kurva  $F(t) = (F_0/T)t$  di mana 't' merupakan step waktu yang sama. Bentuk kurva gaya eksitasi sebagai fungsi dari waktu sebagai contoh ini, adalah linear dengan ' $f(t)$ ' sama dengan nol untuk setiap waktu  $T$  atau periode fungsi. Harga  $a_0$ ,  $a_n$ , dan  $b_n$  dinyatakan sebagai berikut:

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{F_0}{T} t dt = \frac{F_0}{2} \quad (3.76a)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T \frac{F_0}{T} t \cos n\omega_d t dt = 0 \quad (3.76b)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T \frac{F_0}{T} t \sin n\omega_d t dt = -\frac{F_0}{n\pi} \quad (3.76c)$$

Jawab SDOF dengan eksitasi asumsi ini memberikan persamaan steady state sebagai  $y(t)$ , yaitu sebagai berikut:

$$y(t) = \frac{F_0}{2k} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_0 \sin n\omega_d t}{n\pi k(1 - r_n^2)} \quad (3.77a)$$

Atau apabila persamaan 7.77(a) dijabarkan secara deret menjadi:

$$y(t) = \frac{F_0}{2k} - \frac{F_0 \sin \omega_d t}{\pi k(1 - r_1^2)} - \frac{F_0 \sin 2\omega_d t}{2\pi k(1 - 4r_1^2)} - \frac{F_0 \sin 3\omega_d t}{3\pi k(1 - 9r_1^2)} - \dots \quad (3.77b)$$

dengan harga parameter getaran sebagai berikut:

$$r_1 = \frac{\omega_d}{\omega_n}, \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}, \text{ dan } \omega_d = \frac{2\pi}{T}$$

## 3. Eksitasi gaya dari fungsi step acak

Kurva fungsi step acak dinyatakan dengan eksitasi gaya sebagai fungsi dari waktu, dan asumsi gaya linear digunakan untuk pemilihan antar-waktu atau selang waktu step tersebut. Dengan pernyataan lain, fungsi step acak dapat dinyatakan dalam tabel dari sejumlah pasangan harga dari gaya eksitasi  $F(t)$  dengan waktu  $t$ . Linearitas selang dapat diberlakukan dengan syarat bahwa selang waktu sebagai  $(t_{n-m})$  sangat kecil dibanding total pengamatan atau waktu total getaran yang dianalisis. Fungsi eksitasi dapat mengikuti persamaan 3.72, tetapi persamaan untuk koefisien  $a_0$ ,  $a_n$ , dan  $b_n$ , sedikit mengalami perubahan dibanding persamaan 3.73, menjadi sebagai berikut:

$$a_0 = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} F(t) dt \quad (3.78a)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} F(t) \cos n\omega_d t dt \quad (3.78b)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} F(t) \sin n\omega_d t dt \quad (3.78c)$$

Konstanta  $n$  adalah jumlah segment atau selang di mana asumsi linear diberlakukan. Fungsi linear  $F(t)$  untuk persamaan 7.78(a) sampai 7.78(c) diturunkan dengan persamaan linear berikut:

$$F(t) = F(t_{i-1}) + \frac{\Delta F_i}{\Delta t_i} (t - t_{i-1}) \quad (3.79)$$

#### 4. Eksitasi gaya dari fungsi eksponensial

Eksitasi gaya eksponensial disarankan untuk diubah menjadi fungsi eksitasi trigonometri, seperti dinyatakan berikut ini:

$$e^{\pm i\omega_n t} = \cos \omega_n t \pm i \sin \omega_n t \quad (2.13)$$

Persamaan ini merupakan masukan untuk mendapatkan parameter  $C_n$  sesuai persamaan 3.81. Fungsi deret Fourier mirip persamaan 3.73 tetapi dengan koefisien tanpa konstanta ' $a_o$ ', dinyatakan sebagai berikut:

$$F(t) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos n\omega_d t + b_n \sin n\omega_d t) \quad (3.80)$$

Harga koefisien untuk  $a_n$  dan  $b_n$  sebagai berikut:

$$a_n = \frac{1}{T} \sum_{j=0}^{N-1} F(t_j) \cos n\omega_d t_j \Delta t \quad (3.80a)$$

$$b_n = \frac{1}{T} \sum_{j=0}^{N-1} F(t_j) \sin n\omega_d t_j \Delta t, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.80b)$$

Solusi persamaan steady state bentuk deret dengan koefisien  $C_n$  dinyatakan sebagai berikut:

$$C_n = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} F(t_j) e^{-2\pi i (n_j/N)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.81a)$$

$$y(t_j) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{C_n e^{-2\pi i (n_j/N)}}{k(1 - r_n^2 + 2ir_n \xi)} \quad (3.81b)$$

Harga ' $k$ ' adalah konstanta redaman SDOF, dengan ' $r_n$ ' merupakan rasio frekuensi untuk eksitasi gaya ke- $n$ . ' $\rho$ ' merupakan rasio redaman SDOF, yaitu perbandingan harga redaman sistem terhadap redaman kritis atau ' $\rho = c / c_{cr}$ '.

#### 5. Eksitasi gaya asumsi dalam bentuk Fast Fourier Transform

Semua pernyataan yang disampaikan Fourier saat itu belum mempertimbangkan kesulitan dan pekerjaan perhitungan yang melelahkan. Hal ini disebabkan oleh perkembangan komputer yang belum memadai. Kita perlu mengingat bagaimana perjuangan perhitungan manual yang dikomando Gauss untuk mensukseskan menara Eiffel. Eiffel adalah guru Gauss dan Eiffel menantang setiap muridnya untuk membuat solusi dari serangkaian persamaan simultan untuk rancangan menara. Gauss memimpin pernyataan persamaan simultan Gauss atau *Eliminasi Gauss* itu yang konon ditulis sampai dengan kertas seluas setengah lapangan sepak bola. Suatu fungsi gabungan eksitasi gaya untuk setiap periode didefinisikan sebagai  $F(j)$ , yaitu:

$$F(j) = \sum_{n=0}^{N-1} F^{(0)}(n) W_N^{jn} \quad (3.82)$$

Bentuk persamaan eksponen untuk setiap periode dinyatakan sebagai:

$$W_N = e^{2\pi i/N} \quad (3.83)$$

Parameter  $M$  didefinisikan sebagai jumlah koefisien eksponensial yang berhubungan dengan jumlah selang atau jumlah periode eksitasi gaya  $N$  dari data eksitasi gaya asumsi eksponensial. Jumlah koefisien  $M$  dinyatakan sebagai berikut:

$$N = 2^M \quad (3.84)$$

$M$ ,  $j$ , dan  $N$  merupakan bilangan integer, dapat dinyatakan dalam bentuk binari.

Untuk penerapan awal, kita asumsikan periode eksitasi gaya sama dengan 8, maka harga  $M = 3$ , dan tiga koefisien untuk ' $j$  dan  $n$ ' menjadi:

$$j = j_0 + 2j_1 + 4j_2 \quad (3.85a)$$

$$n = n_0 + 2n_1 + 4n_2 \quad (3.85b)$$

Persamaan 3.82 dapat ditulis untuk  $N = 8$  adalah sebagai berikut:

$$F(j) = \sum_{n_2=0}^1 \sum_{n_1=0}^1 \sum_{n_0=0}^1 F^{(0)}(n) W_8^{(j_0+2j_1+4j_2)(n_0+2n_1+4n_2)} \quad (3.86)$$

Faktor eksponensial untuk  $N = 8$  menjadi:

$$W_8^{jn} = W_8^{8(j_1n_2+2j_2n_2+j_2n_1)} W_8^{4n_2j_0} W_8^{2n_2(2j_1+j_0)} W_8^{n_0(4j_22j_1+j_0)} \quad (3.87)$$

Harga  $F(j)$  pada persamaan 3.86 merupakan gaya eksitasi dari 8-periode dengan setiap periode mempunyai koefisien fungsi eksponensial masing-masing. Prosedur ini efektif untuk dinyatakan sebagai algoritma komputasi FFT.

Pembahasan eksitasi gaya untuk model getaran kembali akan disampaikan pada bab selanjutnya yaitu bab IV. Bab IV mencantumkan sekali lagi untuk bentuk umum eksitasi gaya dengan solusi umum juga, antara lain eksitasi gaya asumsi impuls dengan penyelesaian integral konvolusi, eksitasi gaya berupa diskrit dalam berbagai bentuk, eksitasi gaya berpola transien dari landasan atau base, dan solusi persamaan getaran dengan transformasi Laplace.

### 3.9 Ringkasan

Pada sistem getaran satu derajat kebebasan dengan eksitasi gaya pada kasus sistem tak teredam akan ditemukan *fenomena resonansi* di mana frekuensi eksitasi gaya sama dengan frekuensi natural sistem. Fenomena ini menyebabkan amplitudo getaran menuju tak terhingga pada frekuensi *mendekati* frekuensi pribadi. Akibatnya, fenomena ini akan menimbulkan kerusakan pada sistem getaran. Selain itu juga akan ditemukan *fenomena beating* pada kondisi frekuensi eksitasi gaya mendekati frekuensi natural sistem. Pada fenomena beating ini yang terjadi adalah interferensi sudut phase sistem dan gaya eksitasi menjadi penyebab amplitudo sistem membesar dan mengecil tak beraturan.

Eksitasi gaya pada SDOF, memberikan respons sebagai persamaan displacement getaran steady state untuk digabungkan (ditambahkan) dengan persamaan transien (persamaan transien sudah dibahas dalam bab-2, pada bab sebelumnya) sebagai solusi total getaran. Persamaan eksitasi gaya yang dibahas dalam bab ini terdiri dari: 1. Eksitasi gaya harmonik dengan sudut beda phase, 2. Eksitasi gaya tanpa sudut beda phase, 3. Eksitasi gaya dari putaran mesin tak balance, 4. Eksitasi perpindahan atau defleksi dari gerakan base, 5. Eksitasi gaya akibat coulomb damping, 6. Eksitasi gaya dari coulomb damping dengan gaya harmonik, 7. Eksitasi gaya dari beban impact, dan 8. Eksitasi dari asumsi gaya menjadi deret fourier.

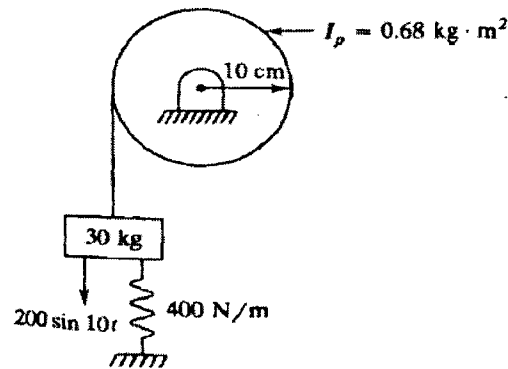
### 3.10 Pertanyaan untuk pemahaman

1. Jelaskan beberapa pengertian berikut dan sertakan contoh serta rumus jika perlu: time dependent, phase transien respons, plat out of phase, sudut phase, displacement transmission capability, rotating balance mass, coulomb damping.
2. 'Tiga kondisi respons SDOF terhadap eksitasi gaya dapat terjadi seperti pada respons redaman SDOF tanpa eksitasi gaya'. Jelaskan arti kalimat ini dari kurva tiga respons tersebut, dan jelaskan juga kondisi masing-masing koefisien eksitasi gaya yang diberikan.
3. Kembangkan persamaan 3.4 untuk eksitasi gaya harmonik asumsi dengan bentuk sinus guna mendapatkan harga koefisien  $X$ ,  $A_1$ , dan  $A_2$ , dan tulis kembali solusi total  $x(t)$ .
4. Karakteristik SDOF dengan eksitasi harmonik memberikan tiga phase respons harmonik mengikuti harga rasio frekuensi. Sebutkan ketiganya dan gambarkan kurva posisi respons harmonik terhadap eksitasi gaya dalam bentuk harmonik tersebut.
5. Jelaskan *fenomena resonansi* dan *fenomena beating* dengan kurva, ditinjau dari pertambahan frekuensi dari frekuensi eksitasi gaya yang diberikan.
6. Eksitasi gaya harmonik pada SDOF dengan pegas-damper memberikan dua keadaan akhir getaran, yaitu teredam dan tidak teredam. Kedua kondisi ini menggunakan persamaan yang sama, yaitu persamaan 3.4 dan persamaan 3.5. Dengan memberi komentar terhadap persamaan 3.5, persamaan 3.6, dan beberapa persamaan berikutnya sebagai pembeda, sebutkan 5 (lima) perbedaan kondisi 'teredam dan tidak teredam' tersebut.



### 3.11 Soal

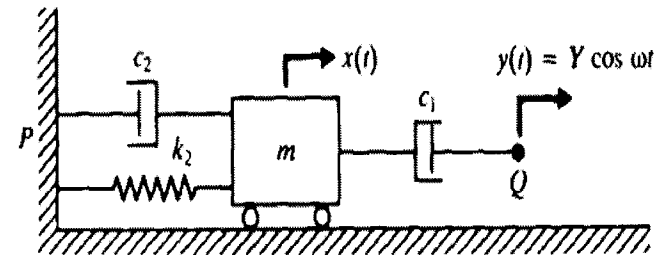
1. Sebuah benda dengan berat 50 N digantung pada pegas dengan konstanta stiffness 4000 N/m. Jika benda tersebut diberi eksitasi harmonik sebesar 60 N dan frekuensinya 6 Hz, tentukan (a) molornya pegas akibat dibebani benda seberat 50 N tadi. (b) Statik displacement pegas disebabkan dibebani gaya maksimum dari eksitasi. (c) Amplitudo dari gaya gerak oleh berat benda!
2. Sistem massa-pegas mendapat eksitasi harmonik yang frekuensinya hampir mendekati frekuensi natural sistem. Jika frekuensi eksitasi 39,8 Hz sedangkan frekuensi natural 40 Hz, tentukan periode beating!
3. Tentukan amplitudo dari gaya osilasi 30 kg balok ini!



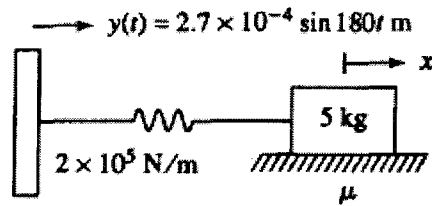
4. Berapakah harga 'M<sub>0</sub>' untuk memaksa amplitudo dari displacement angular dari batang seperti gambar di bawah ini menjadi lebih kecil dari 3°, jika  $\omega = 25$  rad/detik?
5. Lihat sistem di bawah ini. Diketahui  $x$  dan  $y$  representasi displacement absolut dari massa  $m$  dan titik akhir  $Q$  dari dashpot  $c_1$ , sehingga:
  - a. Turunkan persamaan gerak dari massa  $m$ .
  - b. Tentukan displacement dalam kondisi tunak dari massa  $m$ .
  - c. Tentukan berapa gaya yang ditransmisikan ke penyangga  $P$  ketika  $Q$  mendapatkan gerakan harmonik  $y(t) = Y \cos \omega t$ .
6. Suatu sistem getaran SDOF Gambar 3.1 dengan  $m = 10$  kg,  $k = 2500$  N/m dan  $c = 45$  N.s/m. Sebuah gaya harmonik dengan amplitudo 180 N

dan frekuensi 15 Hz dikenakan pada sistem. Jika inisial displacement dan kecepatan dari massa berturut-turut adalah 15 mm dan 5 m/detik pada waktu 1 detik, tentukan solusi komplut dari persamaan gerak massa tersebut!

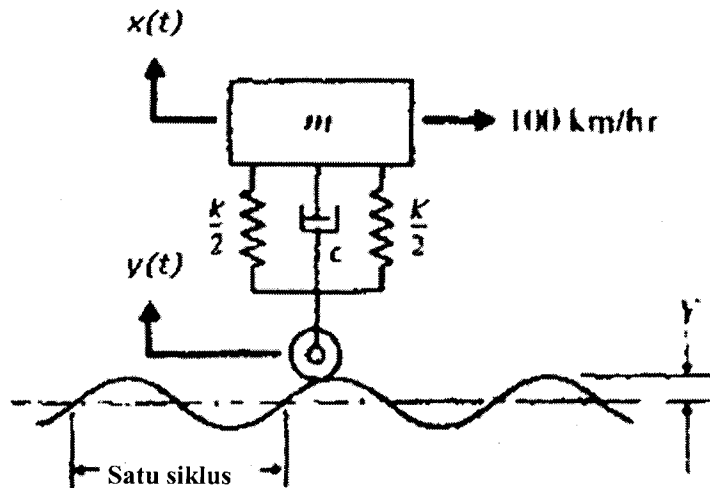
7. Sistem massa-pegas terdiri dari benda dengan berat 100 N dan konstanta stiffness 2000 N/m. Massa beresonansi dengan gaya harmonik  $F(t) = 25 \cos \omega t$ . Tentukan amplitudo pada (a) 1/4 siklus (b) 2.5 siklus dan 5.75 siklus!
8. Dari gambar berikut ini diperlihatkan model kendaraan bermotor yang bergetar dalam arah vertikal ketika melintasi jalan bergelombang. Massanya 2100 kg. Sistem suspensi memiliki konstanta pegas 1000 kN/m dan rasio redaman  $\zeta = 1,5$ . Jika kecepatan kendaraan 100 km/hr. Tentukan amplitudo dari kendaraan! Permukaan jalan sinusoidal dengan amplitudo  $Y = 0,05$  m dengan panjang gelombang 3 m.



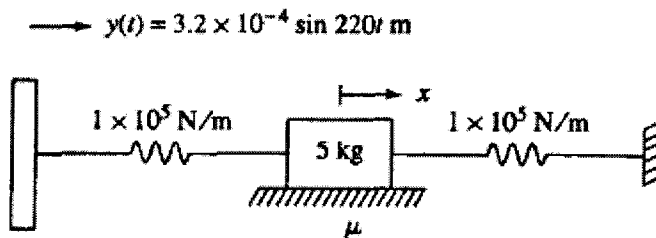
9. Dua buah motor elektrik seperti Gambar 3,3 dengan massa 150 kg, masing-masing memiliki *rotating unbalanced* sebesar 0,5 kg, 0,2 m dari pusat rotasi. Motor dipasang di ujung batang cantilever dengan panjang 1 m, terbuat dari baja ( $E = 210 \times 10^9$  N/m<sup>2</sup>). Jika operasi kedua motor itu dari 500 sampai 1200 rpm, berapakah inersia yang diperlukan dari penampang batang agar getaran tak lebih dari 1 mm asumsikan damping rasio 0,2?
10. Sebuah pompa sentrifugal dengan berat 600 N dan beroperasi pada 1000 rpm, dipasang 6 buah pegas dengan konstanta stiffness masing-masing 4000 N/m. Tentukan berapa maksimum unbalanced agar batasan defleksi puncak ke puncak 5 mm!
11. Tentukan amplitudo dari blok dengan massa 5 kg, jika koefisien geseknya 0,12!



Gambar soal No. 11

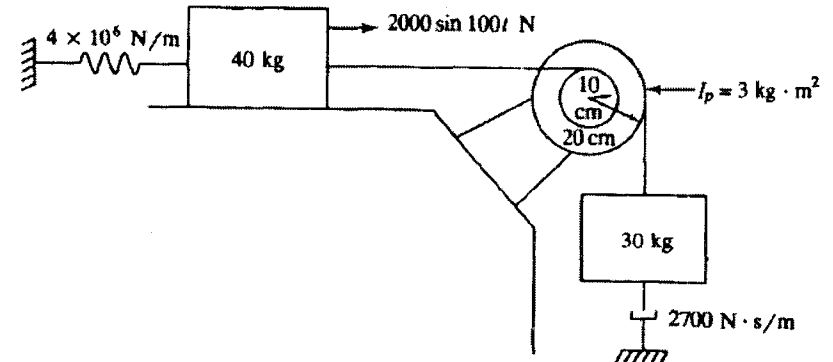


12. Tentukan amplitudo dari blok dengan massa 15 kg, jika koefisien geseknya 0,025!

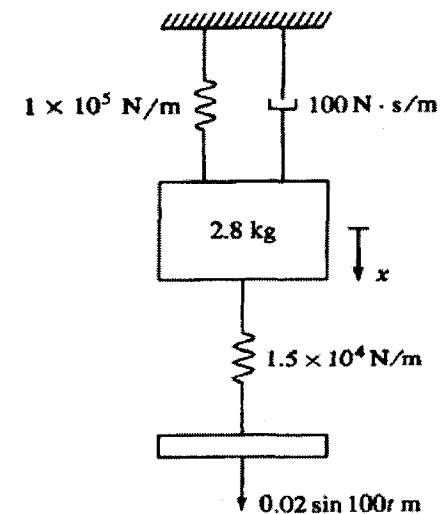


Gambar soal No. 12

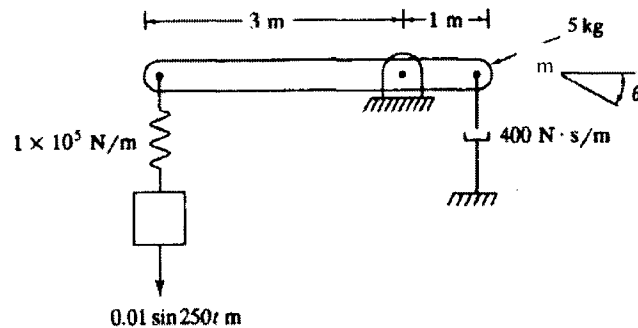
13. Tentukan amplitudo dari blok dengan massa 15 kg, jika koefisien geseknya 0,052!



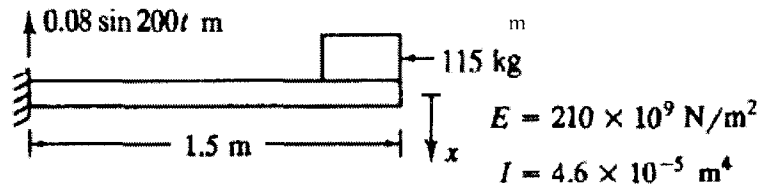
14. Sistem pegas-massa dikenakan pada redaman coulomb. Ketika gaya harmonik dengan amplitudo 120 N dan frekuensi 2,5173268 Hz diaplikasikan pada sistem, sistem berosilasi dengan amplitudo 75 m. Tentukan koefisien gesek jika massa benda 2 kg dan  $k = 2100 \text{ N/m}$ !
15. Tentukan amplitudo maksimum dari sistem di bawah ini!



Gambar Soal No.15

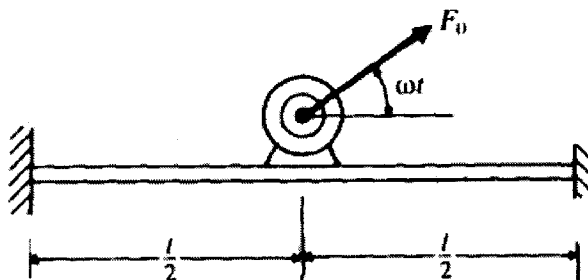


Gambar Soal No. 16



Gambar Soal No. 17

16. Sebuah batang dengan panjang 5 meter, lebar 0.5 meter, dan ketebalan 0.1 m, membawa motor listrik dengan massa 75 kg dan kecepatan 1200 rpm di tengah-tengah batang seperti pada gambar di bawah ini. Sebuah gaya putar besarnya  $F_0 = 5000 \text{ N}$  menyebabkan unbalance pada rotor dari motor. Tentukan amplitudo getaran dalam kondisi tunak dg mengabaikan massa dari batang!



17. Sebuah pompa sentrifugal dengan berat 600 N beroperasi pada kecepatan 1200 rpm disokong oleh 6 pegas dengan konstanta stiffness masing-masing pegas 6000 N/m. Tentukan amplitudo maksimum yang diijinkan pada kondisi unbalance agar defleksi kondisi tunak tidak melebihi 5 mm peak to peak!
18. Suatu sistem pegas-massa-redaman mendapatkan gaya harmonik sebesar  $F(t) = 5 \cos 3\pi t \text{ N}$  akan menghasilkan displacement sebesar  $x(t) = 0,5 \cos(3\pi t - \pi/3) \text{ mm}$ . Tentukan kerja yang diberikan selama satu detik pertama dan 4 detik pertama!

# **BAB 4**

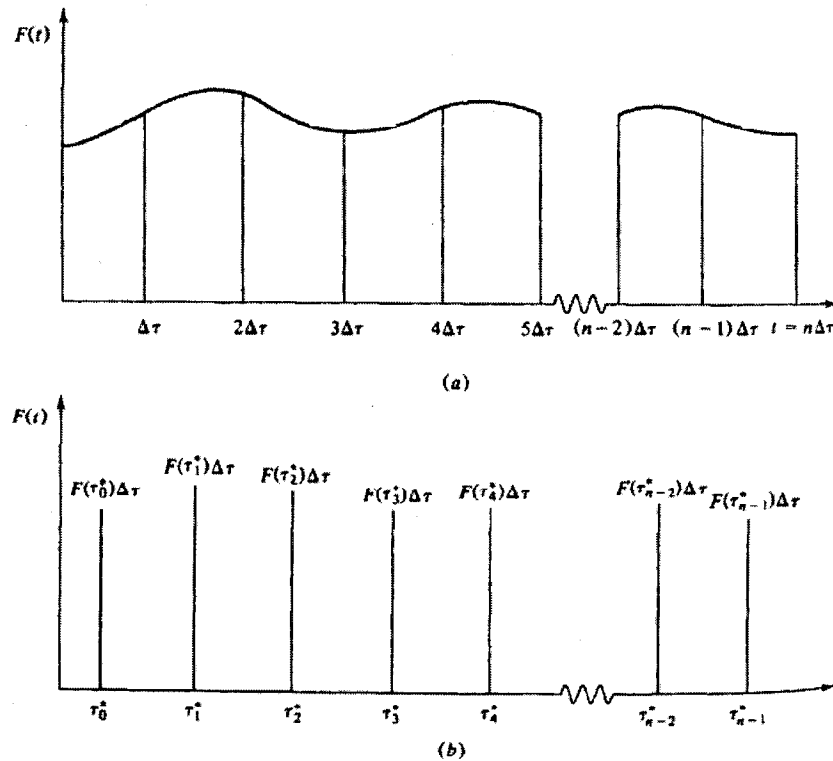
## **EKSITASI GAYA SISTEM SATU DERAJAT KEBEBASAN**

Kompetensi yang ingin dicapai setelah mempelajari bab ini adalah:

1. Mampu menerapkan metode pemecahan masalah eksitasi periodik non-harmonik serta eksitasi non-periodik.
2. Mampu menggunakan metode superposisi untuk memecahkan masalah eksitasi periodik non-harmonik.
3. Mampu menggunakan metode integral convulasi untuk memecahkan masalah eksitasi non-periodik.

### **4.1 Eksitasi Berupa Impuls**

Eksitasi gaya pada sistem getaran merupakan beban atau gaya luar dari sistem. Permasalahan idealisasi eksitasi gaya ini sebagai idealisasi dari gaya riil, merupakan persoalan tersendiri dalam mencari solusi permasalahan getaran. Asumsi beban impuls dengan salah satu contoh sebagai beban impact seperti pada pembahasan bab sebelumnya dapat diberlakukan untuk contoh yang lain dan berlaku umum. Contoh eksitasi gaya adalah asumsi bentuk trigonometri, pulsatif, atau fungsi umum seperti Gambar 4.1. Eksitasi gaya tipe impuls dapat merupakan superposisi beberapa gaya dan hasilnya merupakan kurva gaya sebagai fungsi dari waktu yang tidak beraturan, misalnya seperti Gambar 4.1. Setiap eksitasi gaya untuk selang tertentu memberikan respons displacement harmonik. Jawab persoalan dapat dilakukan dengan memberi asumsi misalnya, kurva impuls dapat dibagi menjadi interval sama, dan respons displacement merupakan superposisi sejumlah segmen atau jumlah delta waktu yang terjadi.



Gambar 4.1 Diskritisasi interval 0 sampai  $t$  durasi  $\Delta\tau = t/n$

Pada bab ini akan diuraikan sistem getaran satu derajat kebebasan dengan bentuk eksitasi umum. Jika berbentuk *eksitasi periodik* tetapi *tidak harmonik*, maka eksitasi itu dapat diganti dalam bentuk jumlah dari fungsi harmonik. Dengan prinsip superposisi, respons sistem dapat ditentukan dengan melakukan superposisi terhadap hasil respons dinamik, misalnya untuk displacement dari fungsi harmonik, yang dianggap secara individual. Jika sistem mendapatkan eksitasi non-periodik maka respons dinamik menjadi berupa transien. Respons transien dari suatu sistem ini dapat ditentukan dengan menggunakan *integral convulasi*.

Fungsi umum untuk eksitasi gaya bersifat kontinu dari superposisi beberapa harga eksitasi gaya lain atau dari objek berbeda. Suatu sistem SDOF dapat menerima eksitasi berubah-ubah seperti diilustrasikan pada Gambar 4.1. Apapun bentuk eksitasi, solusi linearisasi diperoleh dari interval pembagian eksitasi dan hasil pembagian eksitasi ini diberlakukan dengan

pendekatan rumus impuls. Interval mulai dari '0' sampai waktu tertentu dipecah menjadi ' $n$ ' dengan jarak interval yang sama, masing-masing sebesar  $\Delta\tau = t/n$ . Pendekatan untuk solusi masalah ini dikatakan dengan implus, antara lain karena pemahaman eksitasi gaya dari impuls total per segment atau interval yang sama. Sejumlah ' $k$ ' eksitasi gaya sebagai impuls yang diterima SDOF selama interval antara  $k\Delta\tau$  dan  $(k+1)\Delta\tau$ , adalah:

$$I_k^n = \int_{k\Delta\tau}^{(k+1)\Delta\tau} F(t) dt \quad (4.1)$$

Nilai rata-rata dari integral kalkulus persamaan 4.1 untuk  $\tau_k^*$ ,  $k\Delta\tau \leq \tau_k^* \leq (k+1)\Delta\tau$  dinyatakan dengan:

$$I_k^n = F(\tau_k^*)\Delta\tau \quad (4.2)$$

Apabila nilai rata-rata digunakan sebagai referensi dengan kemungkinan akan mendapatkan kelebihan nilai atas yang *positif*, dan nilai bawah yang *negatif*, maka hasil rata-rata impuls akan mendekati nol. Pendekatan impuls  $F(t)$  dikenakan pada  $\tau_k$ ,  $k = 1, \dots, n$ .

SDOF menerima gaya eksitasi impuls dalam selang sejumlah ' $k$ '. Jika diasumsikan selang sangat kecil maka pendekatan kurva patah-patah impuls dapat dianggap sebagai kurva harmonik. Berikut ini rumus *integral convulasi* dari persamaan 4.2 sebagai solusi steady state:

$$x(t) = \int_0^t F(\tau) h(t-\tau) d\tau \quad (4.3)$$

Getaran menjadi berguna untuk analisis, umumnya apabila berada pada kondisi *under damping*. Oleh sebab itu persamaan 4.3 menjadi:

$$x(t) = \frac{1}{m_{eq} \omega_d} \int_0^t F(\tau) e^{-\zeta \omega_n (t-\tau)} \sin \omega_d (t-\tau) d\tau \quad (4.4)$$

Persamaan 4.4 ini digunakan untuk menentukan respons dinamik satu derajat kebebasan, yang dari awalnya diam kemudian diberi eksitasi dalam bentuk apapun. Jika  $h(t)$  dipandang sebagai respons dinamik sistem per satu unit dari impuls pada  $t = 0$  sampai waktu  $t$  dan  $h(t)$  diberlakukan khusus

untuk kondisi selain under damping, maka bentuk umum yang tepat dari solusi steady state untuk  $h(t)$  kondisi getaran bebas dengan redaman kritis *overdamped* dan *underdamped* adalah:

$$h(t) = \frac{1}{m_{eq} \omega_d} e^{-\zeta \omega_n t} \sin \omega_d t \quad \text{untuk } \zeta < 1 \quad (4.5)$$

$$h(t) = \frac{te^{-\zeta \omega_n t}}{m_{eq}} \quad \text{untuk } \zeta = 1 \quad (4.6)$$

$$h(t) = \frac{e^{-\zeta \omega_n t}}{m_{eq} \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}} \sinh(\omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1} t) \quad \text{untuk } \zeta > 1 \quad (4.7)$$

Respons sistem kondisi kecepatan awal tidak sama dengan nol, diperoleh dengan *superposisi* integral konvolusi dari *respons dinamik sistem* untuk satu unit impuls pada  $t = 0$ . Respons dinamik sistem yang tidak sama dalam posisi keseimbangan pada kondisi awal  $t = 0$ , diperoleh dengan mendefinisikan satu variabel displacement independen baru, yaitu  $y$ . Hubungan  $y(t)$  dengan  $x(t)$  adalah sebagai berikut:

$$y = x - x(0)$$

Persamaan diferensial dari  $y(t)$ , bentuk baru integral solusi dari identik persamaan getaran, sesuai hubungan pada persamaan sebelumnya, yaitu:

$$\ddot{y} + 2\zeta\omega_n \dot{y} + \omega_n^2 y = -\frac{k_{eq}}{m_{eq}} x(0) + \frac{F_{eq}(t)}{m_{eq}}$$

Jika digunakan integral konvolusi sesuai persamaan 4.3, maka diperoleh contoh salah satu parameter respons dinamik, yaitu *displacement*. Jawaban persamaan steady state dalam bentuk persamaan integral menjadi berikut ini:

$$x(t) = \int_0^t [-k_{eq} x(0) + F_{eq}(\tau)] h(t - \tau) d\tau$$

Solusi umum untuk sistem getaran dengan eksitasi gaya asumsi impuls *underdamped* masih menyertakan integrasi

$$x(t) = x(0)e^{-\zeta\omega_n t} \cos \omega_d t + \frac{\dot{x}(0) + \zeta\omega_n x(0)}{\omega_d} e^{-\zeta\omega_n t} \sin \omega_d t \quad (4.8)$$

$$+ \frac{1}{m_{eq} \omega_d} \int_0^t F(\tau) e^{-\zeta\omega_n(t-\tau)} \sin \omega_d(t-\tau) d\tau$$

Persoalan integrasi ini dapat diatasi dengan memberlakukan solusi numerik.

#### Contoh 4.1

Tentukan respons dinamik displacement sebagai fungsi waktu ' $t$ ' sebagai solusi persamaan steady state terhadap gaya eksitasi SDOF untuk pegas-massa-dashpot keadaan diam dengan eksitasi  $F(t) = F_0 e^{-\alpha t}$ .

**Jawab:**

Solusi masalah ini dilakukan dengan memasukkan fungsi gaya eksitasi eksponensial pada persamaan integral konvolusi sesuai persamaan 4.3. Penyelesaian integral memperhatikan selang integrasi dari nol sampai  $t$ . Rumus dasar penjumlahan atau pengurangan sinus-cosinus menjadi:

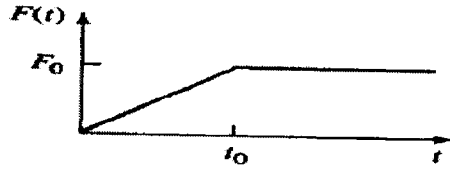
$$x(t) = \frac{1}{m_{eq} \omega_d} \int_0^t F_0 e^{-\alpha \tau} e^{-\zeta\omega_n(t-\tau)} \sin \omega_d(t-\tau) d\tau$$

$$= \frac{F_0}{m_{eq} \omega_d (\omega_n^2 - 2\zeta\omega_n \alpha + \alpha^2)} \times$$

$$\left\{ e^{-\zeta\omega_n t} \left[ (\alpha - \zeta\omega_n) \sin \omega_d t - \omega_d \cos \omega_d t - \omega_d e^{-\alpha t} \right] \right\}$$

#### Contoh 4.2

Sebuah penekan sebagai bagian dari mesin press dengan massa ' $m$ ' dipasang di atas fondasi elastis dengan konstanta kekakuan ' $k$ '. Selama operasi, Eksitasi getaran mesin ditimbulkan dari gaya penekan pada mesin tersebut dengan kondisi awal ' $t = \text{nol}$ ' dengan  $F(0) = \text{nol}$ '. Kemudian eksitasi gaya secara linear menjadi bernilai ' $F_0$ ' pada saat  $t_0$ ', seperti diilustrasikan Gambar 4.2. Tentukan rumus respons  $x(t)$  penekan pada  $t < t_0$  dan  $t > t_0$ .



Gambar 4.2 Eksitasi gaya untuk Contoh 4.2

**Jawab:**

Pernyataan matematik, agar dapat dinyatakan dengan rumus, perlu definisi sebagai: dua fungsi kontinu (sesuai syarat keberlakuan range waktu dari kurva gambar 4.2), dan kondisi non-diferensiabel pada  $t_0$ . Eksitasi gaya asumsi step impuls dari gambar 4.2, dapat diekspresikan sebagai berikut:

$$F(t) = \begin{cases} F_0 \frac{t}{t_0} & t < t_0 \\ F_0 & t \geq t_0 \end{cases}$$

Persamaan integral konvolusi untuk sistem underdamped menjadi:

$$x(t) = \frac{1}{m_{eq} \omega_n} \int_0^t F(\tau) \sin \omega_n (t - \tau) d\tau$$

Tahap pertama, integral untuk  $t < t_0$ . Integral konvulasinya menghasilkan:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{m_{eq} \omega_n} \int_0^t F_0 \frac{\tau}{t_0} \sin \omega_n (t - \tau) d\tau \\ &= \frac{F_0}{m \omega_n t_0} \left[ \frac{\tau}{\omega_n} \cos \omega_n (t - \tau) + \frac{1}{\omega_n^2} \sin \omega_n (t - \tau) \right]_{\tau=0}^{\tau=t} \\ &= \frac{F_0}{m \omega_n^2 t_0} \left( t - \frac{1}{\omega_n} \sin \omega_n t \right) \end{aligned}$$

Untuk  $t > t_0$  maka integral konvulasinya menghasilkan:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{m \omega_n} \left[ \int_0^{t_0} F_0 \frac{\tau}{t_0} \sin \omega_n (t - \tau) d\tau + \int_{t_0}^t F_0 \sin \omega_n (t - \tau) d\tau \right] \\ &= \frac{F_0}{m \omega_n t_0} \left[ \frac{\tau}{\omega_n} \cos \omega_n (t - \tau) + \frac{1}{\omega_n^2} \sin \omega_n (t - \tau) \right]_{\tau=0}^{\tau=t_0} + \left[ \frac{1}{\omega_n} \cos \omega_n (t - \tau) \right]_{\tau=t_0}^{\tau=t} \\ &= \frac{F_0}{m \omega_n^2 t_0} \left[ t_0 \cos \omega_n (t - t_0) + \frac{1}{\omega_n} \sin \omega_n (t - t_0) - \frac{1}{\omega_n} \sin \omega_n t \right] \\ &\quad + \left[ \frac{1}{\omega_n} - \frac{1}{\omega_n} \cos \omega_n (t - t_0) \right] \end{aligned}$$

## 4.2 Eksitasi Gaya Berganti-ganti Selang

Aplikasi rekayasa untuk kasus riil dapat merupakan eksitasi gaya suatu getaran dengan asumsi getaran terjadi pada kondisi waktu diskrit dan bentuk eksitasi gaya tak beraturan. Rumus respon dinamik untuk displacement kondisi ini dinyatakan dalam rumus matematika, dan rumus ini kontinyu secara sepotong-sepotong mengikuti setiap selang nilai waktu diskrit. Kondisi eksitasi gaya seperti pada kasus mesin press atau penekan pada Contoh 4.2, tetapi gaya pada kondisi awal sama dengan nol. Rumus sebagai eksitasi ini umumnya *linier*. Dalam range atau selang waktu tersebut, eksitasi gaya dapat mencapai titik maksimum misalnya pada ' $t_0$ '. Bentuk matematika persamaan dari respons penekan menjadi berbeda untuk  $t < t_0$  dengan untuk  $t > t_0$ . Langkah umum *respons dinamik* persamaan steady state dinyatakan dengan *fungsi step*, yaitu:

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases} \quad (4.9)$$

Respons dinamik displacement dari fungsi step persamaan 4.9, dapat dinyatakan dengan gaya konstan  $F_0$  untuk waktu lebih besar dari ' $t_0$ '. Hal ini direpresentasikan menggunakan keterlambatan unit fungsi step, sebagai berikut:

$$F(t) = \begin{cases} 0 & t \leq t_0 \\ F_0 & t > t_0 \end{cases} = F_0 u(t - t_0) \quad (4.10)$$

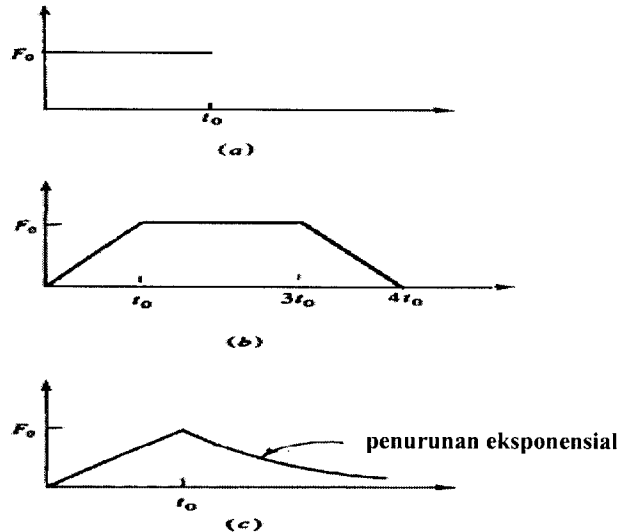
**Contoh 4.3**

Gunakan fungsi step untuk menyatakan gabungan persamaan matematika eksitasi gaya pada Gambar 4.3(a) sampai gambar 4.3(c).

**Jawab:**

Untuk Gambar 4.3(a), fungsi merupakan harga konstan  $F_0$ . Apapun waktu yang terjadi, nilai fungsi tetap  $F_0$ , atau  $F(t) = F_0$  sesuai yang dinyatakan untuk waktu  $t_0$ , sehingga dapat ditulis:

$$F(t) = F_0 [u(t) - u(t - t_0)]$$



**Gambar 4.3** Variasi fungsi step eksitasi gaya untuk Contoh 4.3

Fungsi step Gambar 4.3(b) terdiri dari 3(tiga) sesuai berlaku untuk tiga selang yaitu,  $0 \leq t < t_0$ ,  $t_0 \leq t < 3t_0$ , dan  $3t_0 \leq t < 4t_0$ . Persamaan eksitasi menjadi:

$$F(t) = \frac{F_0 t}{t_0} [u(t) - u(t - t_0)] + F_0 [u(t - t_0) - u(t - 3t_0)] + F_0 \left( 4 - \frac{t}{t_0} \right) [u(t - 3t_0) - u(t - 4t_0)]$$

Fungsi step eksitasi gaya Gambar 4.3(c) merupakan gabungan fungsi linear dengan fungsi eksponensial. Fungsi gaya untuk waktu tertentu, dinyatakan dalam harga respon dinamik displacement menjadi:

$$F(t) = \frac{F_0 t}{t_0} [u(t) - u(t - t_0)] + F_0 e^{-\alpha(t-t_0)} u(t - t_0)$$

Banyak fungsi eksitasi gaya kondisi riil yang ditemui dalam rekayasa merupakan, kombinasi antara lain dari impuls, fungsi step, fungsi ramp, fungsi penurunan eksponensial, dan bentuk *pulsa sinusoidal*. Ada juga fungsi eksitasi gaya yang tidak dapat didefinisikan secara matematis sehingga umumnya fungsi riil ini diestimasikan dengan *fungsi pendekatan*. Tabel 4.1 menyediakan respons dinamik dari eksitasi untuk sistem satu derajat kebebasan atau SDOF dengan eksitasi yang umum dalam terminologi delay waktu  $t_0$ . Solusi respons dinamik dari eksitasi gaya sesuai Tabel 4.1 ini, diturunkan dengan persamaan integral konvolusi sebagai berikut:

$$\int_0^t F(\tau) u(\tau - t_0) d\tau = u(t - t_0) \int_{t_0}^t F(\tau) d\tau \quad (4.11)$$

**Contoh 4.4**

Gunakan integral konvolusi untuk menurunkan respons dari sistem tak teredam SDOF dengan massa  $m$  dan frekuensi naturan  $\omega_n$  dan benda mendapatkan eksitasi delay eksponensial yang tertera pada Gambar 4.4 dan Gambar 4.5

**Jawab:**

Fungsi eksitasi gaya  $F(t)$  menjadi:

$$F(t) = F_0 e^{-\alpha(t-t_0)} u(t-t_0)$$

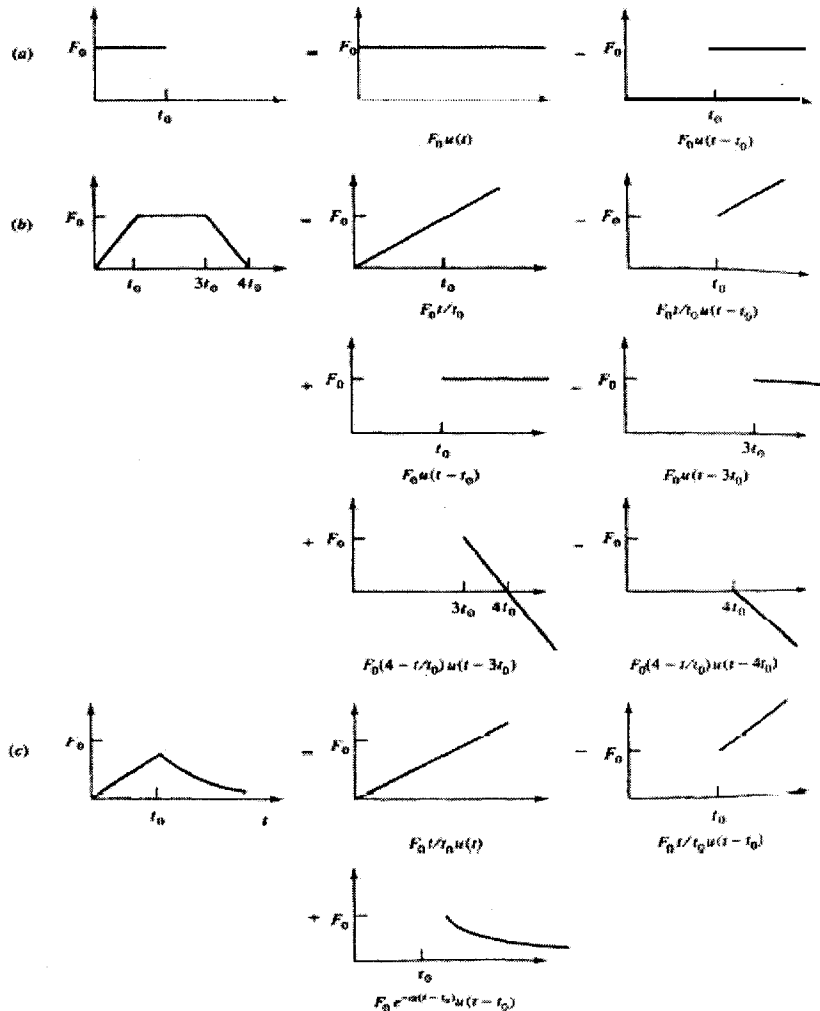
Persamaan integral konvolusi untuk masalah ini adalah:

$$x(t) = \frac{F_0}{m \omega_d} \int_0^t e^{-\zeta \omega_n(t-\tau)} u(t-t_0) \sin \omega_d(t-\tau) d\tau$$



$$x(t) = u(t-t_0) \frac{F_0}{m_{eq} \omega_n} \int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)} \sin \omega_n(t-\tau) d\tau$$

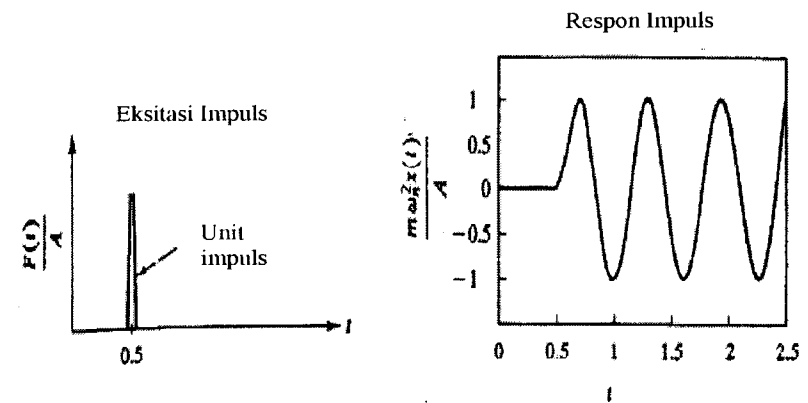
$$= u(t-t_0) \frac{F_0}{m_{eq} \omega_n (\alpha^2 + \omega_n^2)} \left[ \omega_n e^{-\alpha(t-t_0)} + \alpha \sin \omega_n(t-t_0) - \omega_n \cos \omega_n(t-t_0) \right]$$



Gambar 4.4 Breakdown eksitasi dari Gambar 4.3 menjadi fungsi dengan unit step

Eksitasi gaya sering merupakan superposisi atau kombinasi linier dari beberapa fungsi eksitasi gaya yang memiliki respons dinamik, seperti pada Tabel 4.1. Bentuk umum dari eksitasi gaya ini, berubah bentuk pada kondisi diskrit dengan  $t_1, t_2, \dots, t_n$ , yaitu:

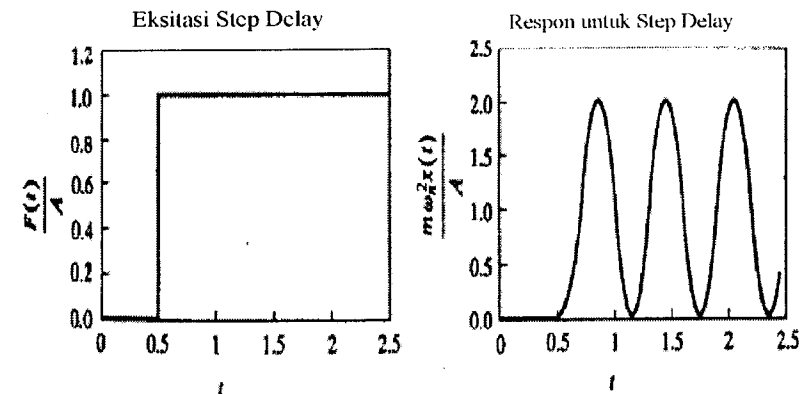
$$F(t) = \sum_{i=1}^n f_i(t) u(t-t_i) \quad (4.12)$$



Delay Fungsi Step

$$F(t) = Au(t-t_0) \quad (\text{gaya eksitasi})$$

$$\eta_{eq} \omega_n^2 x(t)/A = [1 - \cos \omega_n(t-t_0)] u(t-t_0) \quad (\text{respon})$$



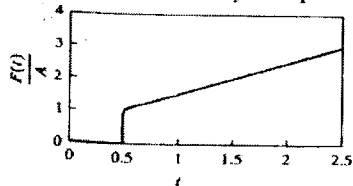
Gambar 4.5(a) Respons dinamik tak teredam eksitasi Impuls dan Step Delay

## Delay Fungsi Ramp

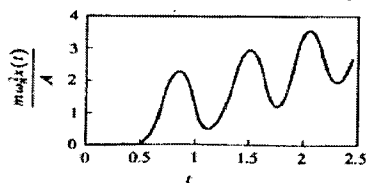
$$\ddot{x}(t) = (At + B)u(t - t_0)$$

$$\frac{m\omega_n^2 x(t)}{A} = [t + B/A - (t_0 + B/A) \cos \omega_n(t - t_0) - \sin \omega_n(t - t_0)/\omega_n] u(t - t_0)$$

## Eksitasi Delay Ramp

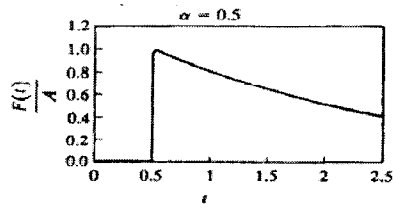


## Respons untuk Delay Ramp

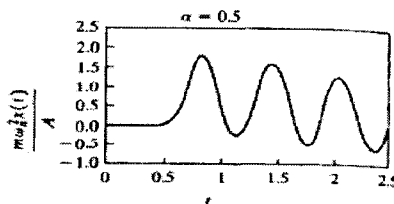


Respon  $\frac{m\omega_n^2 x(t)}{A} = [e^{-\alpha(t-t_0)} + \alpha/\omega_n \sin \omega_n(t-t_0) - \cos \omega_n(t-t_0)] / (1 + \alpha^2/\omega_n^2) u(t-t_0)$

## Eksitasi Delay Eksponen



## Respons untuk Delay Eksponen

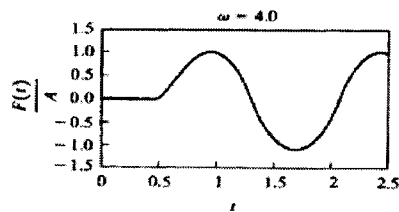


## Delay Fungsi Sinus

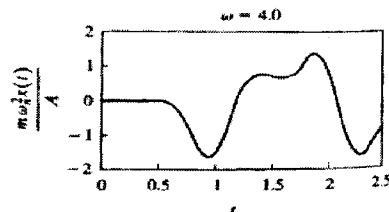
$$F(t) = A \sin \omega(t - t_0) u(t - t_0)$$

$$\frac{m\omega_n^2 x(t)}{A} = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{1}{\omega/\omega_n - 1} \right) [\sin \omega(t - t_0) - \sin \omega_n] - \left( \frac{1}{\omega/\omega_n + 1} \right) [\sin \omega(t - t_0) + \sin \omega_n] \right] u(t - t_0)$$

## Eksitasi Delay Sinusoidal



## Respons Delay Sinusoidal



Gambar 4.5(b) Respons dinamik tak teredam eksitasi sinus, delay ramp-eksponensial

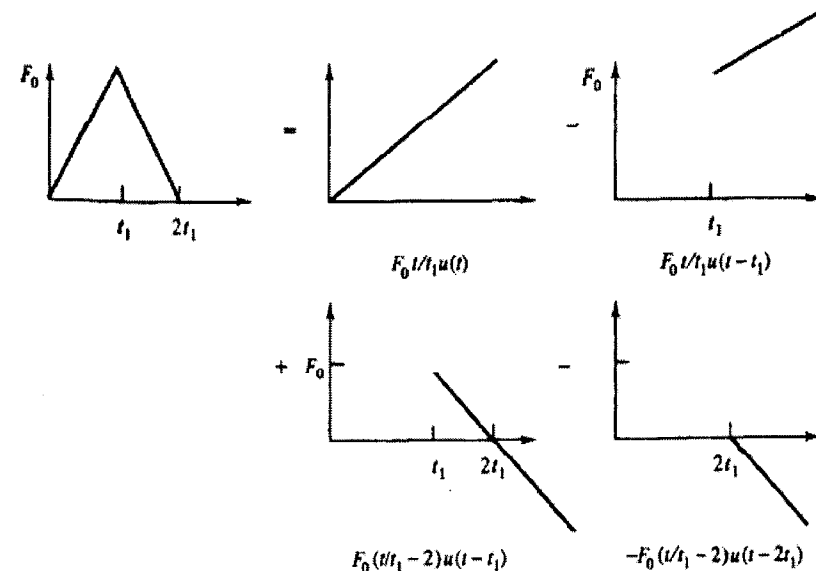
Bentuk umum persamaan *steady state* dari jawab penerapan integral konvolusi untuk eksitasi gaya sesuai persamaan 4.12, menghasilkan:

$$x(t) = \sum_{i=1}^n u(t - t_i) \int_{t_i}^t f_i(\tau) h(t - \tau) d\tau \quad (4.13)$$

Persamaan 4.13 sebagai persamaan *steady state* ini, menunjukkan bahwa harga total respons dinamik displacement merupakan penjumlahan dari respons masing-masing suku individu sesuai selang waktu diskrit. Kondisi awal dapat diberikan tidak nol dan kondisi ini tercakup pada respon  $f_i(t)$ .

## Contoh 4.5

Gunakan rujukan dari Gambar 4.5(a) dan Gambar 4.5(b) untuk membangun respons dari sistem satu derajat kebebasan linier dengan massa 'm', dan frekuensi natural ' $\omega_n$ ' ketika benda mendapatkan eksitasi berbentuk pulsa sesuai Gambar 4.6.



Gambar 4.6 Pulsa segi-3 serta breakdownnya dari Contoh 4.5

## Jawab:

Pulsa segitiga seperti gambar 4.6 dapat ditulis atau dirumuskan sebagai penjumlahan dari fungsi *ramp* yang berbeda. Respons dinamik eksitasi gaya akibat dari pulsa segitiga ini diperoleh dengan menambahkan dan mengurangi beberapa kemungkinan eksitasi dari asumsi gaya sederhana.

Respons dinamik berupa displacement persamaan steady state dari masing-masing fungsi ramp mengacu pada rumus di bawah ini:

$$x(t) = x_a(t) - x_b(t) + x_c(t) - x_d(t)$$

Dalam hal ini respons individual dipilih dari yang tercantum dalam Gambar 4.5.  $x_a(t)$  ditentukan menggunakan fungsi ramp dari Gambar 4.5 dengan rumus serta koefisien, yaitu:

1. Dengan  $A = F_0/t_1$ ,  $B = 0$ , dan  $t_0 = 0$ , sehingga diperoleh:

$$x_a(t) = \frac{F_0}{m\omega_n^2} \left[ \frac{t}{t_1} - \frac{1}{\omega_n t_1} \sin \omega_n t \right]$$

2. Dengan  $x_b(t)$  yang ditentukan menggunakan fungsi ramp masuk dari Tabel 4.1 untuk  $A = F_0/t_1$ ,  $B = 0$ , dan  $t_0 = t_1$ , sehingga diperoleh:

$$x_b(t) = \frac{F_0}{m\omega_n^2} \left[ \frac{t}{t_1} - \cos \omega_n(t-t_1) - \frac{1}{\omega_n t_1} \sin \omega_n(t-t_1) \right] u(t-t_1)$$

3. Untuk  $x_c(t)$  ditentukan menggunakan fungsi ramp masuk dari Tabel 4.1 dengan  $A = -F_0/t_1$ ,  $B = 2F_0$ , dan  $t_0 = t_1$ , diperoleh:

$$x_c(t) = \frac{F_0}{m\omega_n^2} \left[ \left( 2 - \frac{t}{t_1} \right) - \cos \omega_n(t-t_1) + \frac{1}{\omega_n t_1} \sin \omega_n(t-t_1) \right] u(t-t_1)$$

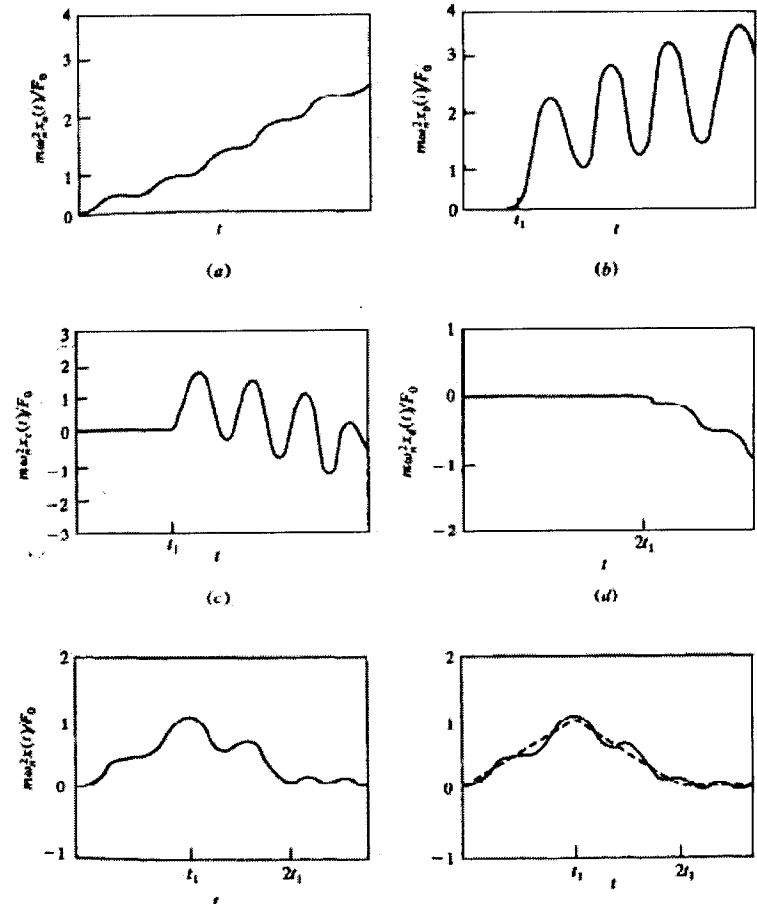
Untuk  $x_d(t)$  ditentukan menggunakan fungsi ramp masuk dari Tabel 4.1 dengan  $A = -F_0/t_1$ ,  $B = 2F_0$ , dan  $t_0 = 2t_1$  dengan:

$$x_d(t) = \frac{F_0}{m\omega_n^2} \left[ \left( 2 - \frac{t}{t_1} \right) + \frac{1}{\omega_n t_1} \sin \omega_n(t-2t_1) \right] u(t-2t_1)$$

Penyederhanaan hasil persamaan dalam interval waktu menghasilkan:

$$x(t) = \frac{F_0}{m\omega_n^2} \begin{cases} \frac{t}{t_1} - \frac{1}{\omega_n t_1} \sin \omega_n t & 0 \leq t \leq t_1 \\ 2 - \frac{t}{t_1} + \frac{1}{\omega_n t_1} [2 \sin \omega_n(t-t_1) - \sin \omega_n t] & t_1 \leq t \leq 2t_1 \\ \frac{1}{\omega_n t_1} [2 \sin \omega_n(t-t_1) - \sin \omega_n t - \sin \omega_n(t-2t_1)] & t > 2t_1 \end{cases}$$

Respons masing-masing komponen diperlihatkan pada gambar di bawah ini.



Gambar 4.7 Plot Solusi Respons Dinamik untuk Soal 4.5

### 4.3 Getaran Akibat Eksitasi Landasan

Sistem mekanis dan struktur banyak ditemukan bertumpu pada landasan. Struktur ini mendapatkan eksitasi gaya dari getaran landasan. Getaran landasan dalam bab sebelumnya diasumsikan, tetapi dalam bab ini Getaran landasan umumnya bersifat tidak mempunyai periode tetap atau non-periodik. Contoh getaran dari landasan adalah sebuah ban rigid yang berjalan di sepanjang kontur permukaan jalan. Dalam hal ini tekanan ban pada kontur jalan yang tidak beraturan, diteruskan ke sistem suspensi mobil sebagai getaran dari jalan. Gempa merupakan contoh lain eksitasi gaya dari landasan (gerakan bumi) dan eksitasi gaya dari gempa bumi. Getaran gempa diteruskan pada struktur gedung.

Gerakan SDOF berasal dari displacement landasan ' $y(t)$ ' dan displacement relatif antara massa dan landasannya terhadap massa dengan notasi ' $z(t)$ '. Persamaan getaran ditentukan terhadap massa dengan landasan, melalui pegas dan redaman viscous secara paralel, yaitu:

$$\ddot{z} + 2\zeta\omega_n \dot{z} + \omega_n^2 z = -\ddot{y} \quad (4.14)$$

$y(t)$  merupakan gerakan dari landasan.

Jika  $z(0) = 0$ , maka  $\dot{z}(0) = 0$ . Solusi atau jawab dari persamaan getaran 4.14 merupakan persamaan integral konvolusi. Displacement relatif  $z(t)$  dengan persamaan steady state solusi persamaan getaran ini adalah:

$$z(t) = m_{eq} \int_0^t \ddot{y}(\tau) h(t-\tau) d\tau \quad (4.15)$$

Persamaan 4.15 dapat ditulis dalam bentuk lain. Hal itu dilakukan untuk pembahasan tidak melibatkan percepatan, melainkan pembahasan dengan pendekatan kecepatan sebagai yang diketahui. Integrasi persamaan 4.15 dilakukan untuk mendapatkan solusi dalam bentuk kecepatan landasan, yaitu:

$$z(t) = m_{eq} \left[ \dot{y}(0) h(t) - \int_0^t \dot{y}(\tau) \dot{h}(t-\tau) d\tau \right] \quad (4.16)$$

$$\text{dengan, } \dot{h}(t) = -\frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{m_{eq} \sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_d t - \chi) \quad (4.17)$$

$$\text{dan, } \chi = \tan^{-1} \left( \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} \right)$$

Jika displacement diketahui, maka persamaan ini dapat diturunkan untuk menghitung kecepatan. Sementara itu, persamaan 4.16 dapat digunakan untuk memperoleh solusi sebagai berikut:

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n \dot{x} + \omega_n^2 x = -2\zeta\omega_n \dot{y} - \omega_n^2 y \quad (4.18)$$

Apabila diaplikasikan pada integral konvolusi dari persamaan 4.18, diperoleh:

$$x(t) = -m_{eq} \int_0^t 2\zeta\omega_n \dot{y}(\tau) + \omega_n^2 y(\tau) h(t-\tau) d\tau \quad (4.19)$$

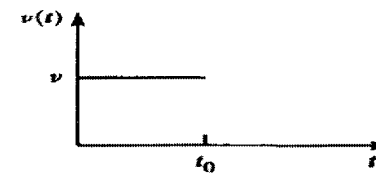
#### Contoh 4.6

Tentukan respons displacement relatif persamaan steady state dari balok dengan massa- $m$  yang dihubungkan melalui pegas kekakuan  $k$  dengan gerak getaran dari landasannya. SDOF mendapatkan gaya eksitasi dari landasan, berupa pulsa kecepatan seperti terlihat pada Gambar 4.8. Gunakan persamaan 4.16 dan 4.15.

**Jawab:**

Persamaan matematika untuk gaya eksitasi dengan pulsa kecepatan sesuai Gambar 4.8 adalah:

$$\dot{y}(t) = v[u(t) - u(t-t_0)]$$



Gambar 4.8 Pulsa kecepatan untuk Contoh 4.6

- a. Syarat awal sebagai asumsi untuk konstanta persamaan getaran dilakukan dari definisi syarat awal dengan  $u(0) = 0$ , dan  $\dot{y}(0) = 0$ .

Kita gunakan persamaan 4.14 dari sistem tak teredam untuk memperoleh persamaan respons displacement  $z(t)$ , dengan catatan berlaku untuk  $\chi = 0$  dengan  $\sin(\omega_n t - \pi/2) = \cos \omega_n t$ . Penerapan catatan ini pada persamaan 4.16 akan menghasilkan:

$$z(t) = -v \int_0^t [u(\tau) - u(\tau - t_0)] \cos \omega_n (t - \tau) d\tau$$

$$z(t) = -v \left[ u(t) \int_0^t \cos \omega_n (t - \tau) d\tau - u(t - t_0) \int_{t_0}^t \cos \omega_n (t - \tau) d\tau \right]$$

$$= \frac{v}{\omega_n} [\sin \omega_n (t - t_0) u(t - t_0) - \sin(\omega_n t) u(t)]$$

- b. Percepatan landasan diperoleh dengan menurunkan kecepatan landasan terhadap waktu. Sehubungan dengan fungsi kecepatan yang merupakan fungsi step, maka percepatan sebagai turunan fungsi step adalah fungsi impuls. Penurunan tersebut dinyatakan sebagai berikut:

$$\ddot{y}(t) = v [\delta(t) - \delta(t - t_0)]$$

Harga kecepatan mengalami perubahan pada  $t = t_0$  sampai  $t = t$ . Perubahan sesaat dari kecepatan ini menghasilkan simpangan sebagai persamaan steady state relatif antara balok dengan landasan dan eksitasi gaya diterapkan sebagai impuls. Substitusi percepatan landasan  $d^2 y/dt^2$  ke dalam persamaan 4.15 menghasilkan persamaan sebagai berikut:

$$z(t) = -\frac{v}{\omega_n} \int_0^t [\delta(\tau) - \delta(\tau - t_0)] \sin \omega_n (t - \tau) d\tau$$

- c. Integral ini dievaluasi dengan menyatakan sebagai fungsi gaya eksitasi berikut ini:

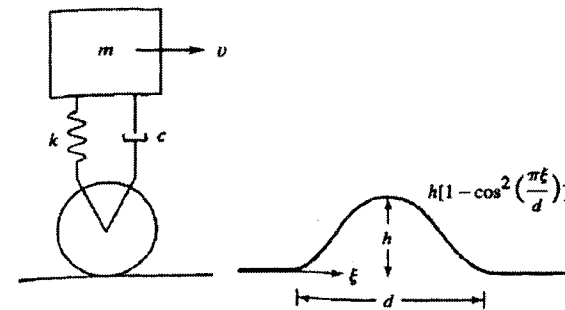
$$\int_0^t \delta(\tau - t_0) f(\tau) d\tau = f(t_0) u(t - t_0)$$

Perpindahan relatif ditentukan dengan persamaan sebagai berikut:

$$z(t) = \frac{v}{\omega_n} [\sin \omega_n (t - t_0) u(t - t_0) - \sin(\omega_n t) u(t)]$$

### Contoh 4.7

Mobil dengan idealisasi SDOF sebagai suatu roda kendaraan dengan  $m = 900 \text{ kg}$ ,  $k = 80,000 \text{ N/m}$  dan  $\zeta = 0.2$ , Mobil tersebut melintasi gundukan seperti terlihat pada gambar di bawah ini. Tentukan persamaan kecepatan respons dinamik sebagai persamaan displacement relatif mobil dengan landasan steady state. Kecepatan mobil melintasi gundukan konstan sama dengan 20 m/detik dan panjang gundukan ( $d$ ) adalah 80 cm.



### Jawab:

Model matematika dari gundukan sebagai input gaya eksitasi landasan dinyatakan dalam koordinat horizontal permukaan jalan, ' $\xi$ '. Harga ' $u$ ' dihitung dari persamaan 4.9 dan persamaan 4.10, sehingga:

$$y(\xi) = h \left[ 1 - \cos^2 \left( \frac{\pi \xi}{d} \right) \right] \left[ 1 - u(\xi - d) \right]$$

Dengan harga  $d = 0.8 \text{ m}$  maka diperoleh  $h = 0.01 \text{ m}$ . Jika kendaraan melintasi gundukan pada  $t = 0$  dan setelah melewati gundukan dengan kecepatan yang dipertahankan konstan sama dengan  $v$ , maka  $\xi = vt$ .

Displacement vertikal dari roda adalah:

$$y(t) = h \left[ 1 - \cos^2 \left( \frac{\pi v}{d} t \right) \right] \left[ 1 - u \left( t - \frac{d}{v} \right) \right]$$

Maka integral konvolusi dari bentuk persamaan 4.19 digunakan untuk menentukan respons dinamik persamaan steady state sistem. Kecepatan roda dinyatakan sebagai berikut:

$$\dot{y}(t) = 2\left(\frac{\pi v}{d}\right) \sin\left(\frac{2\pi v}{d}t\right) \left[1 - u\left(t - \frac{d}{v}\right)\right]$$

Asumsi syarat batas kondisi ini adalah  $y(0)=0$  dan  $y(d/v)=0$ , maka tidak diperlukan tutunan yang mengikuti prosedur dari pengerjaan fungsi unit step.

#### 4.4 Solusi dengan Transformasi Laplace

Metode transformasi Laplace adalah suatu metode yang tepat untuk menemukan respons dinamik dari sistem akibat eksitasi berupa gaya. Metode ini didasarkan pada *properti* atau *sifat getaran* yang sudah diketahui dari transformasi persamaan ordinary diferensial (ODE) menjadi persamaan aljabar dengan menggunakan kondisi awal. Persamaan aljabar ini diharapkan dapat menjadi jawaban atas permasalahan dari transformasi. Transformasi ini dapat dilakukan mundur atau dibalik dengan menggunakan properti dari transformasi sebelumnya berupa '*tabel fungsi-s*'. Pasangan bentuk transformasi sesuai yang diberikan. Transformasi Laplace dapat digunakan untuk memecahkan persamaan linier dari ODE dengan menggunakan konstanta atau koefisien polinomial. Contohnya adalah eksitasi gaya yang ditulis dalam rumus matematika yang dipadukan dengan menggunakan fungsi step. Teorema shifting membantu mendapatkan bentuk transformasi dan mengevaluasi inversi dari transformasi tersebut.

Transformasi Laplace tidak mudah digunakan seperti halnya integral konvolusi. Untuk dapat menggunakannya maka diperlukan pengalaman yang cukup. Misalkan  $\bar{x}(s)$  adalah koordinat umum transformasi Laplace untuk sistem satu derajat kebebasan, atau:

$$\bar{x}(s) = \int_0^{\infty} x(t) e^{-st} dt$$

Didefinisikan  $F(s)$  sebagai transformasi Laplace dari fungsi eksitasi gaya yang diketahui. Bentuk spesifik dari gaya eksitasi  $F(t)$  dihitung dari definisi transformasi yang digunakan. Hal ini dilakukan dengan mengacu pada tabel pasangan Laplace dan menggunakan properti dasar yang berkonjungsi pada tabel tersebut. Misal, untuk persamaan gerak sebagai berikut:

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n \dot{x} + \omega_n^2 x = \frac{F_{eq}(t)}{m_{eq}}$$

Transformasi Laplace skala linear digunakan, sehingga bentuk transformasi Laplace adalah:

$$\mathcal{L}\left\{\ddot{x}\right\} + 2\zeta\omega_n \mathcal{L}\left\{\dot{x}\right\} + \omega_n^2 \bar{x}(s) = \frac{\bar{F}(s)}{m_{eq}} \quad (4.21)$$

Properti untuk transformasi dinyatakan sebagai penurunan dari persamaan untuk  $x(t)$ , kemudian properti diganti dengan dinyatakan ke dalam persamaan aljabar untuk  $\bar{x}(s)$ . Hasil transformasi diaplikasikan pada persamaan 4.21 menjadi:

$$s^2 \bar{x}(s) - sx(0) - \dot{x}(0) + 2\zeta\omega_n [s\bar{x}(s) - x(0)] + \omega_n^2 \bar{x}(s) = \frac{\bar{F}(s)}{m_{eq}}$$

Persamaan di atas disusun ulang menjadi:

$$\bar{x}(s) = \frac{\frac{\bar{F}(s)}{m_{eq}} + (s + 2\zeta\omega_n)x(0) + \dot{x}(0)}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (4.22)$$

Definisi dan linieritas dari transformasi balik digunakan untuk mendapatkan persamaan steady state respons dinamik displacement  $x(t)$  sehingga menjadi:

$$x(t) = \frac{1}{m_{eq}} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{F(s)}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \right\} + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{(s + 2\zeta\omega_n)x(0) + \dot{x}(0)}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \right\} \quad (4.23)$$

Transformasi balik ini dilakukan terhadap masing-masing suku persamaan 4.23. Hal ini tergantung tipe akar persamaan Laplace dalam-s dan pembilang dari persamaan yang mengandung parameter ' $\zeta$ '. Harga ' $\zeta$ ' yang sudah diketahui bentuk transformasi baliknya dapat ditentukan secara langsung. Transformasi balik dari suku pertama persamaan 4.23 ditentukan setelah nilai spesifik dari  $F_{eq}(t)$  diketahui.

Untuk sistem SDOF getaran bebas yang berarti tanpa eksitasi gaya, tetapi kondisi *under damped*. Bentuk persamaan Laplace dengan pembilang akan memiliki *dua akar* kompleks. Dalam kasus ini penting untuk menyelesaikan kuadrat dari pembilang persamaan 4.23 dulu, seperti yang ditulis berikut ini:

$$(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_n^2 (1 - \zeta^2)$$

Transformasi Laplace pada suku terakhir dari persamaan 4.23 dapat ditentukan dengan mengaplikasikan teori *shifting* sampai pasangan transformasi dapat diketahui, yaitu:

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{(s + 2\zeta\omega_n)x(0) + \dot{x}(0)}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \right\} = e^{-\zeta\omega_n t} \left[ x(0) \cos \omega_d t + \frac{\zeta\omega_n x(0)}{\omega_d} \sin \omega_d t \right] \quad (4.24)$$

Transformasi balik dari suku pertama persamaan 4.23 diperoleh dengan menyatakan fungsi Laplace  $\bar{F}(s)$  untuk bentuk eksitasi gaya dari  $F(t)$  yaitu, dengan bentuk  $\bar{F}(s) / (s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)$ . Inversi fungsi atau persamaan Laplace dapat dicari menggunakan manipulasi aljabar, dengan properti transformasi, serta bantuan tabel pasangan fungsi Laplace dengan asal transformasi yang sudah diketahui.

#### Contoh 4.8

Sebuah mesin dengan  $m = 200$  kg dipasang pada fondasi dengan asumsi tanpa redaman, yaitu pada permukaan elastis dengan kekakuan  $k = 200.000$  N/m. Mesin yang bekerja mendapatkan gaya eksitasi yang merupakan impuls tetap dengan harga 2000 N selama 3 detik dan kemudian eksitasi gaya tersebut tidak bekerja lagi. Dapatkah kondisi respons dinamik dari getaran SDOF tanpa damping dieliminasi tanpa penambahan redaman, dan berapaakah defleksi maksimum dari mesin? Asumsikan  $g = 10$  m/det<sup>2</sup>

**Jawab:**

Persamaan getaran atau diferensial pada kasus ini adalah:

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = F_0 [u(t) - u(t-3)]$$

Dari yang diketahui, yaitu  $F_0 = 2000$  N,  $k = 200.000$  N/m, dan  $m = 200$  kg, dapat ditentukan:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{2 \times 10^5}{200}} = 31,63 \text{ rad/s}$$

Transformasi Laplace  $F(t)$ , menggunakan teorema *second shifting* diperoleh:

$$\mathcal{L}\{F_0 [u(t) - u(t-3)]\} = \frac{F_0}{s} (1 - e^{-3s})$$

Kemudian dengan menggunakan persamaan 4.23, jika asumsi kondisi awal displacement pada  $t = 0$ , dan  $x(0) = 0$ , maka:

$$\dot{x}(0) = 0, \text{ maka } \bar{x}(s) = \frac{F_0}{m} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1 - e^{-3s}}{s(s^2 + \omega_n^2)} \right\}$$

Dengan fraksional dekomposisi diperoleh:

$$\bar{x}(s) = \frac{F_0}{m} \left( \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + \omega_n^2} \right) (1 - e^{-3s})$$

Teorema *second shifting* digunakan untuk membantu inversi dari transformasi Laplace, sehingga diperoleh:

$$x(t) = \frac{F_0}{m\omega_n^2} [1 - \cos \omega_n t - u(t-3)(1 - \cos \omega_n(t-3))]$$

Solusi untuk  $t > 3$  detik adalah:  $x(t) = \frac{F_0}{m\omega_n^2} [\cos \omega_n(t-3) - \cos \omega_n t]$

Fungsi cosinus selanjutnya berlaku untuk  $t > 3$  detik sebagai gerakan transien menjadi:

$$\cos \omega_n t = \cos \omega_n(t-3)$$

Kondisi setelah 3 detik dinyatakan dengan  $3\omega_n = 2n\pi$ , dan berlaku untuk semua nilai integer positif  $n$  sehingga getaran SDOF dalam kondisi tunak ini dieliminasi dengan menentukan frekuensi pribadi menjadi:

$$\omega_n = \frac{2n\pi}{3} = 2,09 \text{ n rad/s}$$

Kondisi redaman terjadi untuk  $n = 15$ , yang berhubungan dengan  $\omega_n = 31,35 \text{ rad/s}$  dan  $m = 203.5 \text{ kg}$  sehingga getaran kondisi tunak dapat dieliminasi jika  $3.5 \text{ kg}$  ditambahkan pada massa mesin. Sebelumnya massa mesin  $200 \text{ kg}$ . Mesin mengalami 15 siklus selama dikenai gaya eksitasi dan gerakan ceases terjadi ketika gaya dihilangkan.

Maksimum displacement selama mesin berkerja adalah:

$$x(t) = \frac{2F_0}{m\omega_n^2} = \frac{2F_0}{k} = 0.02 \text{ m}$$

## 4.5 Ringkasan

Bab ini membahas pengaruh eksitasi, baik dalam bentuk periodik maupun non-periodik pada sistem satu derajat kebebasan atau SDOF. Bentuk gaya eksitasi yang dibahas adalah impuls, gaya eksitasi sebagai fungsi terhadap waktu diskrit, dan eksitasi gaya pada base sistem.

Beberapa metode pemecahan persamaan respons digunakan dalam masalah ini, yaitu superposisi, integral konvolusi, maupun transformasi Laplace. Ketiga metode ini masing-masing memiliki kelebihan dan kekurangan.

Beberapa contoh diberikan untuk memudahkan dalam memahami maksud dan tujuan dari pemecahan masalah persamaan gerak dari sistem satu derajat kebebasan dengan bentuk eksitasi umum ini.

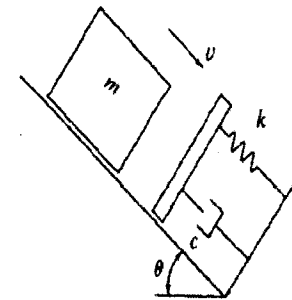
## 4.6 Pertanyaan untuk Pemahaman

Jelaskan pengertian berikut ini, dan certakan contoh dari:

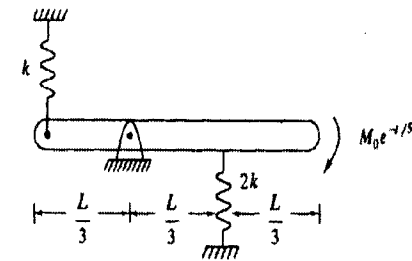
- Integral convulasi
- Fungsi step
- Eksitasi gaya impuls
- Persamaan steady state displacement relatif
- Persamaan ordinary diferensial
- Transformasi Laplace
- Transformasi balik Laplace.

## 4.7 Soal

- Sebuah sistem satu derajat kebebasan tak teredam dalam keadaan diam kemudian dikenai eksitasi gaya eksponensial sebesar  $F(t) = F_0 te^{-t/2}$ . Gunakan integral konvolusi untuk menentukan respons dari sistem!
- Massa pada gambar untuk soal nomor 2 memiliki kecepatan  $v$  ketika menumbuk mekanisme sistem pegas-dashpot. Jika  $x(t)$  adalah displacement dari massa dari posisi di mana mekanisme tertekan, maka gunakan integral konvolusi untuk menentukan respons displacement sistem! Asumsikan sistem *underdamped*.
- Gunakan integral konvolusi untuk menentukan rumus matematik respons dari sistem pada gambar dibawah ini.



Gambar soal No. 2

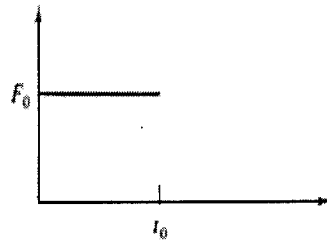


Gambar soal No. 3

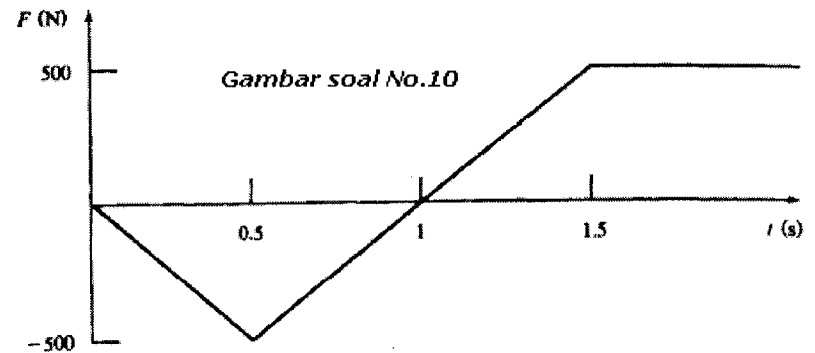
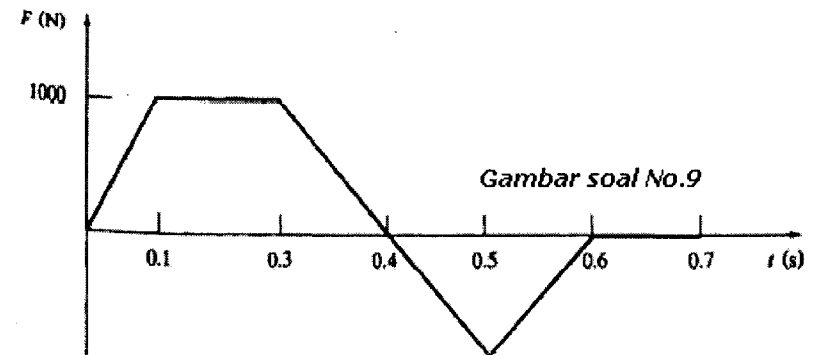
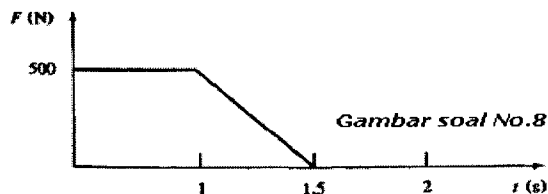
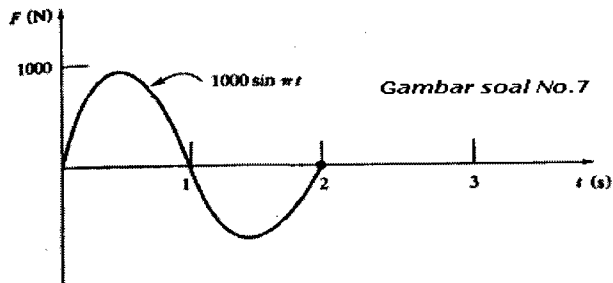
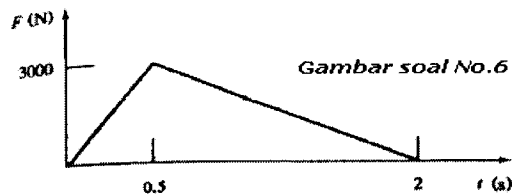
- Gunakan integral konvolusi untuk menentukan rumus matematik respons dari sistem satu derajat kebebasan underdamped dengan frekuensi natural ' $\omega_n$ ' dan rasio redaman ' $\zeta < 1$ ' dan dikenakan eksitasi harmonik  $F(t) = F_0 \sin \omega t$ .
- Sistem SDOF dengan frekuensi natural  $\omega_n$  dan rasio redaman  $\zeta < 1$  dikenakan gaya eksitasi sebagai pulsa rectangular  $F_0$  dengan durasi  $t_0$ . Setelah gaya eksitasi dihilangkan, nyatakan rumus respons dinamik displacement sebagai persamaan steady state maksimum yang terjadi.
- Sebuah mesin perkakas, massa  $30 \text{ kg}$  dipasangkan pada fondasi undamped kekakuan  $1500 \text{ N/m}$ . Selama operasi mesin dikenai salah satu gaya eksitasi sesuai gambar dibawah ini. Gunakan prinsip super-



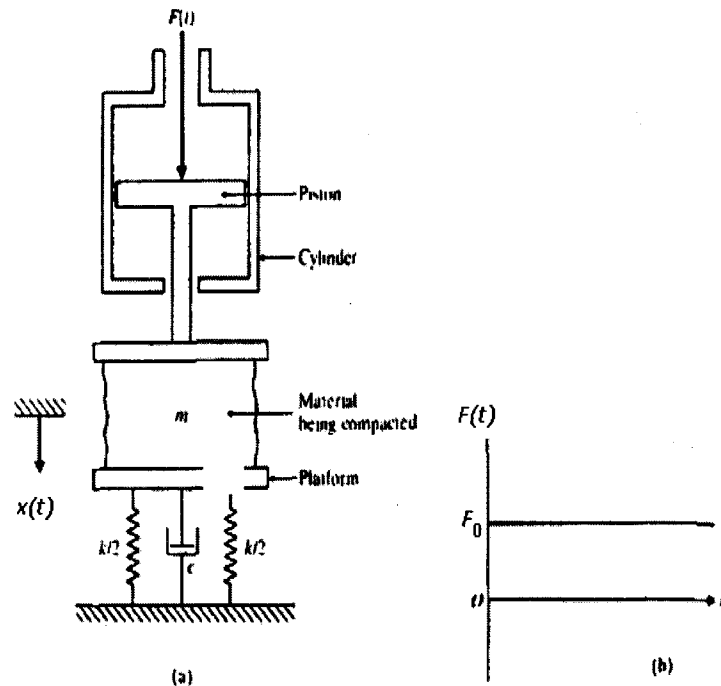
posisi dan integral konvolusi untuk menentukan berupa respons displacement! Gambar soal nomor 8 sama dengan untuk soal nomor 7, tetapi dengan fungsi linear satu gunung di puncak  $t = 0.5$  detik dan satu lembah di dasar  $t = 1.5$  detik.



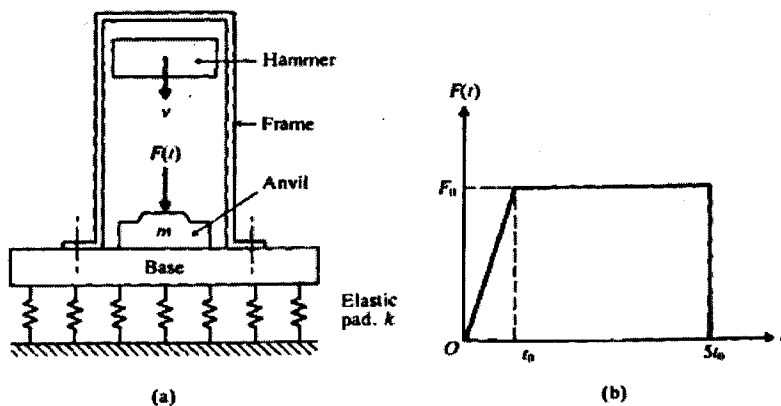
7. Gunakan integral convulasi untuk menentukan respons dari sistem satu derajat kebebasan tak teredam yang mendapat eksitasi seperti gambar di bawah ini!



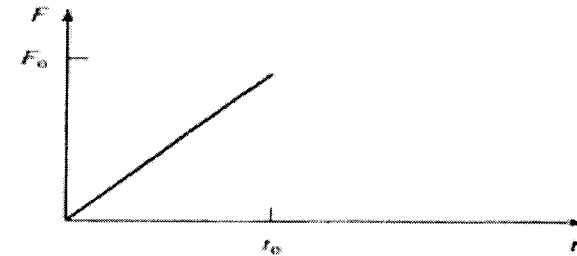
8. Sebuah mesin pengepres dimodelkan sebagai sistem SDOF seperti terlihat pada gambar (a) di bawah ini. Eksitasi gaya merupakan massa, ' $m$ ' yang mencakup massa piston, platform, dan material yang akan dikompaksikan, dan diidealisasikan sebagai gaya step (gambar b). Tentukan respons dinamik sebagai displacement dengan persamaan displacement total sistem!



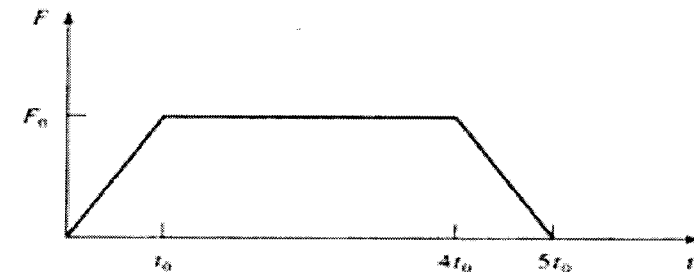
9. Rangka, anvil, dan base dari forging hammer seperti dinyatakan pada gambar (a) di bawah ini memiliki massa total  $m$ , dengan support elastis konstanta stiffness  $k$ . Jika gaya eksitasi diaplikasikan pada mesin ini, tentukan rumus persamaan displacement total sebagai respons dinamik dari anvil!



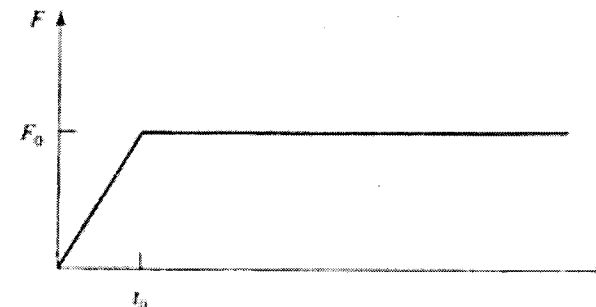
10. Gunakan integral convulasi untuk menentukan respons dari sistem satu derajat kebebasan tak teredam yang mendapat eksitasi gaya seperti gambar di bawah ini untuk  $t > t_0$ !



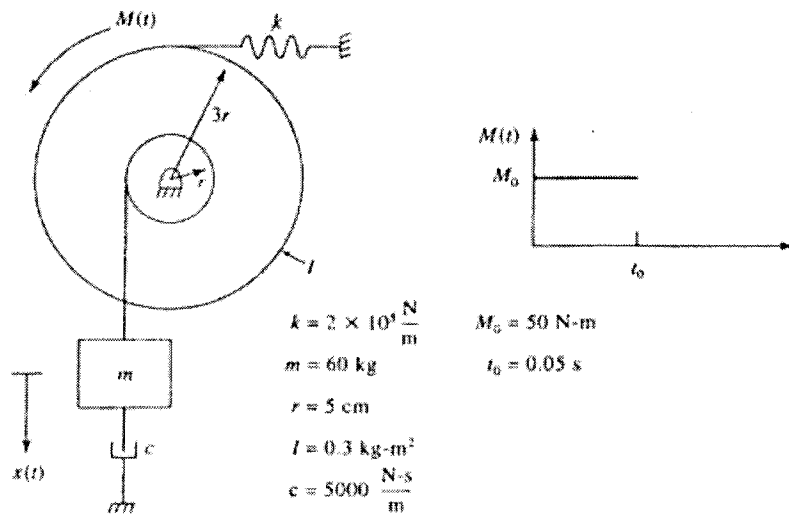
11. Gunakan integral convulasi untuk menentukan respons dari sistem satu derajat kebebasan tak teredam yang mendapat eksitasi seperti gambar di bawah ini!



12. Gunakan integral convulasi untuk menentukan respons dari sistem satu derajat kebebasan tak teredam yang mendapat eksitasi seperti gambar di bawah ini!



13. Gunakan integral convulasi untuk menentukan respons dari sistem satu derajat kebebasan tak teredam yang mendapat eksitasi seperti gambar di bawah ini!



14. Mesin dengan massa 200 kg ditempatkan pada vibration isolator dengan rasio redaman 0,1. Berapakah harga konstanta stiffness agar displacement maksimum lebih kecil dari 2 mm ketika mesin mendapatkan gaya berupa pulsa sinusoidal dengan besar 1000 N dan durasi waktu 0,04 s.
15. Mesin dengan massa 500 kg ditempatkan pada sebuah vibration isolator dengan rasio redaman 0,05 dan konstanta stiffness  $3 \times 10^5 \text{ N/mm}$ . Selama start-up mesin mendapatkan eksitasi  $F(t) = 1000e^{t^2}$  dengan  $t_0 = 0,1 \text{ s}$  dan  $F_0 = 5000 \text{ N}$ , dengan integral convulasi berapakah displacement mesin?
16. Gunakan integral convulasi untuk sistem pegas-massa-redaman yang mendapatkan eksitasi sebesar  $F(t) = 1000e^{t^2}$ ! Massa mesin 200 kg dengan rasio redaman 0,05 dan isolator stiffness  $2 \times 10^6 \text{ N/m}$ .

# BAB 5

## SISTEM GETARAN DUA DERAJAT KEBEBASAN

Kompetensi yang ingin dicapai setelah mempelajari bab ini adalah:

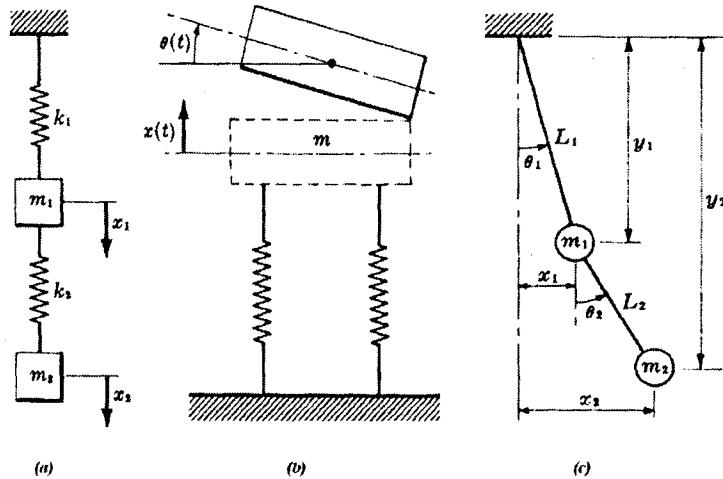
1. Memahami dan mengetahui definisi sistem getaran dengan dua derajat kebebasan.
2. Mampu melakukan analisis terhadap kasus sistem getaran bebas tak teredam dengan dua derajat kebebasan.
3. Mampu melakukan analisis terhadap kasus sistem getaran dua derajat kebebasan dengan beban torsional.
4. Mampu melakukan analisis terhadap kasus sistem getaran paksa tak teredam dengan dua derajat kebebasan.

### 5.1 Persamaan Getaran dengan Metode Newton

Bab ini akan khusus membahas sistem asumsi dari idealisasi kondisi riil benda lamp mass menjadi *Double Degree of Freedom* (DDOF), atau sistem getaran dengan dua derajat kebebasan. Sistem ini membutuhkan dua buah koordinat bebas, disebut sistem dua derajat kebebasan. Sistem dua derajat kebebasan ini diasumsikan selalu terjadi dalam dua dimensi dan dibagi atas tiga kondisi sistem, yaitu:

1. *Kondisi sistem pertama:* sistem massa pegas seperti terlihat dalam Gambar 5.1a, dengan gerakan massa  $m_1$  dan  $m_2$  secara vertikal. Jumlah DOF sama dengan jumlah massa. DOF masing-masing massa dibatasi oleh pegas atau pasangan pegas-damper sehingga dibutuhkan dua koordinat, yaitu  $x_1(t)$  dan  $x_2(t)$ . Hal ini guna menentukan kedudukan massa pada kondisi waktu berapapun. Hal itu berarti sistem membutuhkan dua buah koordinat yang memberi informasi lokasi serentak

atau secara bersama-sama dengan menentukan kedudukan atau posisi dua massa tersebut. Kedua koordinat ini bergerak linear dan pada umumnya gerakan itu vertikal semua atau horizontal semua. Contoh pada Gambar 5.1a menunjukkan gerakan vertikal.



Gambar 5.1 Tiga contoh sistem dua derajat kebebasan

2. *Kondisi sistem kedua*, terjadi bila sebuah balok lamp massa  $m$  ditumpu dengan dua buah pegas dengan koefisien kekakuan yang sama pada jarak paling tidak mendekati panjang balok, atau dapat juga pada tumpuan. DDOF adalah dua pasangan pegas damper dengan sifat kekakuan dan redaman yang sama, seperti terlihat dalam Gambar 5.1b. Gerakan balok dibatasi sesuai kemampuan sistem tumpuan balok, yaitu secara vertikal oleh  $x(t)$  dan gerakan rotasi oleh  $\theta(t)$ .  $x(t)$  dan  $\theta(t)$  merupakan dua buah koordinat yang identik sebagai kemampuan gerakan benda untuk menentukan konfigurasi sistem. Konfigurasi sistem ini merupakan perpindahan lurus seperti perpindahan massa  $x(t)$ , dan koordinat yang lain adalah perpindahan sudut atau  $\theta(t)$  sebagai rotasi massa. Kedua koordinat ini satu sama lain independen atau bebas. Oleh karena itu sistem ini juga merupakan sistem dua derajat kebebasan.
3. *Kondisi sistem ketiga* merupakan sistem dengan gerakan untuk dua pendulum, atau pendulum ganda, seperti terlihat pada Gambar 5.1c. Dalam kondisi ini jelas bahwa untuk menentukan posisi massa  $m_1$  dan  $m_2$  pada setiap waktu dibutuhkan dua buah koordinat dalam sistem

sehingga sistem ini juga dikatakan sistem dua derajat kebebasan. Dua gerakan tersebut adalah  $\theta_1(t)$  dan  $\theta_2(t)$ .

Persamaan getaran Multy Degree Of Freedom (MDOF), termasuk DDOF, untuk benda lamp mass pada umumnya dapat dinyatakan mengikuti prosedur metode Newton. Sebagai contoh, persamaan getaran DDOF diuraikan dari Gambar 5.2. Dengan prosedur tersebut dinyatakan sebagai berikut:

1. Menentukan indeks awal dan indeks akhir untuk sederet benda lamp mass bersusun, dan dalam penentuan indeks awal tersebut, langkah pertama dimulai dari lokasi di mana tumpuan ditempatkan.
  2. Mendefinisikan arah dari  $F_i(t)$  dan  $x_i(t)$ , dan kedua arah ini harus dibuat sama serta mengikuti arah pertambahan indeks massa seperti pada nomor 1.
- Penerapan dua prosedur tersebut dinyatakan pada Gambar 5.2a untuk kondisi pilihan indeks awal-akhir dari kiri ke kanan, dan kemungkinan dapat juga dilakukan untuk pemberian indeks dari kanan ke kiri.
3. Menyatakan untuk fokus metode ini adalah melakukan prosedur pemberian gaya aksi-reaksi dengan menguraikan kondisi beberapa benda lamp mass yang berhubungan, sesuai prinsip *Free Body Diagram* (FBB), yang disebut juga Diagram Benda Bebas (DBB).
  4. Membuat uraian DBB disertai pernyataan beban yang berupa gaya, momen, atau torsi. Kasus pada Gambar 5.2, beban yang berupa gaya digambarkan dengan arah sebagai aksi-reaksi.

Gambar 5.2b merupakan penerapan dari kedua prosedur di atas. Penetapan gaya aksi-reaksi mengikuti dua aturan dalam Hukum Newton III, yaitu gaya atau beban harus memiliki *besar yang sama* dan dengan *arah yang berlawanan*. Perhatikan bagaimana arah gaya pegas dan gaya redam untuk koefisien  $c_3$  dan  $k_3$ . Kedua gaya tersebut mempunyai arah ke kiri. Kedua arah gaya ini mengikuti logika kejadian riil di mana operasional dua benda lamp mass selalu menyebabkan *gaya kompresi* yang diderita pegas dan damper ke-3. Arah sebaliknya, yaitu ke kanan, merupakan dua gaya sebagai gaya aksi-reaksi yang bekerja pada dinding kanan, yang mana terlihat bahwa kedua gaya aksi-reaksi yang bekerja pada dinding tersebut memberi kondisi gaya kompresi pada dinding kanan.

5. **Menyatakan arah inersia** sejalan dengan arah  $d^2x/dt^2(t)$  sebagai arah gaya yang mewakili persamaan getaran bebasnya.

Getaran muncul akibat respons benda terhadap gaya eksitasi luar sebagai gaya inersia yang terjadi secara terus-menerus. Gerakan benda bergetar mengikuti arah yang berlawanan dengan gerakan benda sesungguhnya. Hal ini karena gerak getaran sesungguhnya merupakan respons dari arah gaya yang diberikan. Dalam Gambar 5.2(b), gaya inersia digambarkan dengan arah ke kiri.

6. **Membuat persamaan getaran.** Persamaan ini diberlakukan untuk setiap benda lamp mass. Persamaan ini ditulis mengikuti keharusan di mana arah gaya selaras dengan posisi gaya eksitasi yang ditempatkan pada ruas kanan dari tanda sama dengan atau =.

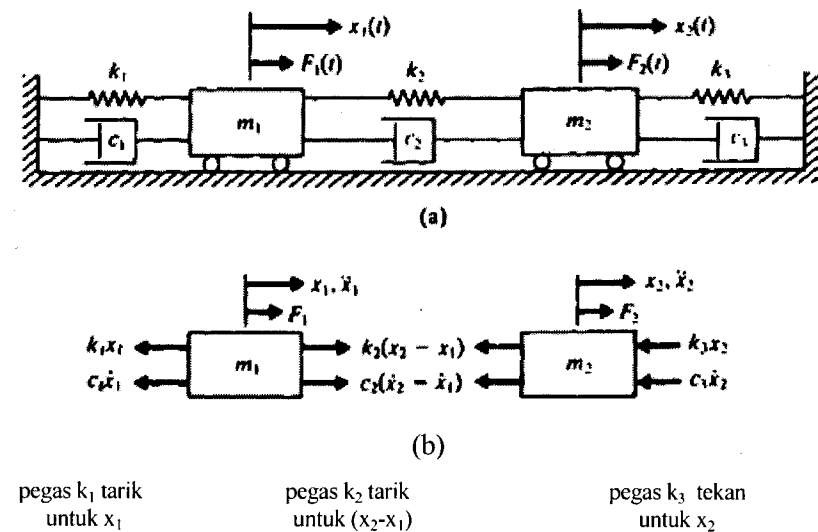
Persamaan 5.1 merupakan *penyederhanaan persamaan keseimbangan* yang terjadi dan hanya diberlakukan untuk benda lamp mass ke-1. Sebagai arah positif pada ruas kiri mengikuti arah gaya inersia dengan  $m_1 d^2x/dt^2(t)$  positif ke kiri. Hal yang sama terjadi pada benda ke-2 pada persamaan 5.2.

7. Koefisien pada matriks [C] identik dengan koefisien pada matriks [k], dan kedua matriks tersebut merupakan matriks simetri.

Persamaan getaran yang terjadi pada setiap benda tersebut apabila digabung merupakan persamaan Couple. Persamaan itu dapat dinyatakan dalam bentuk matriks sesuai persamaan 5.3(a) dengan koefisien pada matriks [C] dan [k] pada persamaan 5.3(c) dan persamaan 5.3(d). Persamaan Couple adalah persamaan yang masih memiliki harga koefisien pegas maupun koefisien redaman dengan indeks (untuk kedua koefisien tersebut), tidak bersesuaian dengan indeks dari benda atau indeks-i pada ' $m_i$ '. Sifat matriks [C] dan [k] yang identik dan simetri ini dapat digunakan untuk mengecek kebenaran pengerjaan persamaan getaran yang dilakukan.

Pada pembahasan subbab berikutnya, solusi MDOF dilakukan dengan dua cara, yaitu cara analitik dan cara numerik. Salah satu cara analitik yang akan dibahas dalam bab ini merupakan solusi dengan penerapan prosedur metode Rayleigh. Prosedur ini menggunakan asumsi koordinat transformasi, dengan  $y_i(t)$ , dan ' $i$ ' menunjukkan jumlah DOF. Persamaan  $y_i(t)$  sudah merupakan persamaan Decouple, yaitu seperti persamaan SDOF untuk

setiap benda sehingga untuk mendapatkan jawaban riil displacement dengan notasi  $x_i(t)$ , dilakukan transformasi dari matriks ortogonal notasi [Q]. Solusi  $x_i(t)$  kembali dapat diperlakukan dengan menganggap hasil transformasi sebagai kelompok SDOF. Contoh dua cara numerik untuk menjawab persamaan getaran MDOF yang dilakukan dengan cara numerik adalah dengan *Finite Difference Method* atau Metode Beda Hingga, dan *Metode Runge-Kutta*.



**Gambar 5.2** Sistem pegas-redaman dua derajat kebebasan

Pembahasan DDOF adalah sebagai berikut: Terdapat dua persamaan gerak untuk sistem dua derajat kebebasan, satu untuk masing-masing massa yang biasanya dalam bentuk persamaan *differential coupled* atau persamaan couple yang mana masing-masing melibatkan semua koordinat. Jika solusi harmonik diasumsikan pada masing-masing koordinat maka persamaan gerak untuk DDOF memberikan dua harga frekuensi natural. Jika sistem diberi eksitasi gaya awal yang cukup maka sistem akan bergetar pada salah satu frekuensi naturalnya. Selama getaran bebas terjadi dan bergetar pada salah satu frekuensi naturalnya, konfigurasi amplitudo dua derajat kebebasan tersebut disebut sebagai *normal mode*, *principal mode*, dan *natural mode* dari getaran. Sistem dua derajat kebebasan memiliki dua normal mode dari getaran yang berhubungan dengan dua frekuensi natural. Jika kita berikan eksitasi awal ke sistem maka getaran bebas akan menghasilkan superposisi dari getaran dua normal mode. Namun demikian jika sistem bergetar karena

adanya eksitasi berupa eksitasi harmonik maka resonansi terjadi. Hal ini secara teori menyebabkan amplitudo dua koordinat akan maksimum apabila frekuensi eksitasi sama dengan salah satu frekuensi sistem natural.

Perhatikan Gambar 5.2 untuk sistem pegas-massa-redaman dua derajat kebebasan. Gerakan dari sistem sempurna diuraikan dengan koordinat ' $x_1(t)$  dan  $x_2(t)$ ' yang mendefinisikan posisi massa  $m_1$  dan  $m_2$  pada setiap waktu  $t$  dari posisi keseimbangan. Gaya eksternal  $F_1(t)$  dan  $F_2(t)$  bekerja pada massa ' $m_1$  dan  $m_2$ '. Free body diagram dari massa  $m_1$  dan  $m_2$  diperlihatkan pada Gambar 5.2(b). Penerapan metode Newton mengenai gerakan pada masing-masing massa memberikan persamaan gerak sebagai berikut:

$$m_1 \ddot{x}_1 + (c_1 + c_2) \dot{x}_1 - c_2 \dot{x}_2 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2 x_2 = F_1 \quad (5.1)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 - c_2 \dot{x}_1 + (c_2 + c_3) \dot{x}_2 - k_2 x_1 + (k_2 + k_3)x_2 = F_2 \quad (5.2)$$

Persamaan 5.1 masih terdapat atau mengandung suku ' $x_2$ '. Begitu juga dengan persamaan 5.2 selain dengan ' $x_2$ ' juga masih mengandung suku ' $x_1$ '. Kedua persamaan di atas adalah persamaan *two coupled differential*. Getaran yang terjadi dari massa  $m_1$  berpengaruh terhadap getaran yang timbul dari massa  $m_2$ . Begitu pula sebaliknya. Persamaan 5.1 dan persamaan 5.2 dapat ditulis dalam bentuk matriks sebagai berikut:

$$[m] \ddot{x}(t) + [c] \dot{x}(t) + [k] x(t) = F(t) \quad (5.3a)$$

Matriks parameter getaran ' $[m]$ , ' $[c]$ , dan ' $[k]$ ' masing-masing disebut sebagai matriks massa, matriks damping, dan matriks stiffness. Koefisien untuk ketiga matriks tersebut, setelah dicari dengan metode Newton, diperoleh sebagai berikut:

$$[m] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \quad (5.3b)$$

$$[c] = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 + c_3 \end{bmatrix} \quad (5.3c)$$

$$[k] = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix} \quad (5.3d)$$

Dari persamaan 5.3,  $x(t)$  dan  $F(t)$  pada masing-masing menyatakan displacement untuk solusi total dan eksitasi gaya dalam bentuk matriks sebagai berikut:

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad F(t) = \begin{bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \end{bmatrix} \quad (5.3e)$$

Dalam hal ini matriks dari  $[m]$ ,  $[c]$ , dan  $[k]$  merupakan matriks  $2 \times 2$  dan harga masing-masing koefisien ketiga matriks tersebut dapat diketahui langsung dari riil sistem. Ketiga matriks ini adalah matriks simetri, sehingga hubungan 'transpose' berlaku sebagai berikut:

$$[m]^T = [m], \quad [c]^T = [c] \quad \text{dan} \quad [k]^T = [k]$$

Dalam contoh 5.1 pada sub bab berikut ini, pencarian persamaan getaran untuk beberapa contoh lamp mass tidak disertakan, tetapi persamaan getaran yang diperoleh langsung digunakan untuk pembahasan atau jawaban atas permasalahan.

## 5.2 Solusi Transien DDOF Sistem Tak Teredam

DDOF getaran bebas merujuk pada sistem getaran pada Gambar 5.2(a), dengan kita asumsikan kondisi untuk set gaya eksitasi, yaitu  $F_1(t) = F_2(t) = 0$ . Sistem DDOF menjadi tanpa eksitasi gaya dan juga agar efek redaman tidak terjadi maka  $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ . Kondisi ini memenuhi syarat DDOF dengan Getaran Bebas Tak Teredam. Persamaan 5.1 dan persamaan 5.2 menjadi sebagai berikut:

$$m_1 \ddot{x}_1(t) + (k_1 + k_2)x_1(t) - k_2 x_2(t) = 0 \quad (5.4)$$

$$m_2 \ddot{x}_2(t) - k_2 x_1(t) + (k_2 + k_3)x_2(t) = 0 \quad (5.5)$$

Massa  $m_1$  dan  $m_2$  dalam kondisi DDOF bebas dan tak teredam, maka kedua masa itu dapat saling berosilasi secara harmonik dengan frekuensi dan

sudut phase yang sama tetapi berbeda amplitudonya. Dari kondisi gerakan ini maka asumsikan displacement kedua massa yang mungkin adalah dengan memperoleh gerakan harmonik, untuk frekuensi  $\omega$  dan sudut phase  $\phi$  yang sama. Akurasi persamaan transien dari persamaan 5.4 dan persamaan 5.5 menjadi sebagai berikut:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= X_1 \cos(\omega t + \phi) \\ x_2(t) &= X_2 \cos(\omega t + \phi) \end{aligned} \quad (5.6)$$

$X_1$  dan  $X_2$  merupakan konstanta yang menunjukkan amplitudo maksimum dari  $x_1(t)$  dan  $x_2(t)$ . Kedua massa ini mempunyai beda phase yang sama, yaitu  $\phi$ . Substitusikan persamaan 5.6 ke persamaan 5.4 dan 5.5 sehingga hasilnya adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \left[ \{-m_1\omega^2 + (k_1 + k_2)\} X_1 - k_2 X_2 \right] \cos(\omega t + \phi) &= 0 \\ \left[ -k_2 X_1 + \{-m_2\omega^2 + (k_2 + k_3)\} X_2 \right] \cos(\omega t + \phi) &= 0 \end{aligned} \quad (5.7)$$

Persamaan 5.7 dapat dari DDOF ini dapat disederhanakan. DDOF mempunyai dua frekuensi pribadi atau dalam kondisi tidak bergerak, jika harga cosinus sama dengan satu, sehingga:

$$\begin{aligned} \left[ \{-m_1\omega^2 + (k_1 + k_2)\} X_1 - k_2 X_2 \right] &= 0 \\ \left[ -k_2 X_1 + \{-m_2\omega^2 + (k_2 + k_3)\} X_2 \right] &= 0 \end{aligned} \quad (5.8)$$

Persamaan 5.8 ini merupakan dua persamaan aljabar simultan dengan harga  $X_1$  dan  $X_2$  yang tidak diketahui. Persamaan 5.8 ini bersifat *trivial solution* jika  $X_1 = X_2 = 0$ , yang artinya kondisi tidak ada getaran. Dengan demikian solusi perlu dengan kondisi non-trivial. Kondisi non-trivial dicapai jika determinan dari  $X_1$  dan  $X_2$  sama dengan nol. Dalam penyelesaian analisis numerik, penentuan determinan merupakan salah satu cara untuk mendapatkan parameter pada persamaan simultan, sehingga:

$$\det \begin{bmatrix} \{-m_1\omega^2 + (k_1 + k_2)\} & -k_2 \\ -k_2 & \{-m_2\omega^2 + (k_2 + k_3)\} \end{bmatrix} = 0$$

atau:

$$\begin{aligned} (m_1 m_2) \omega^4 - \{(k_1 + k_2) m_2 + (k_3 + k_2) m_1\} \omega^2 \\ + \{(k_1 + k_2)(k_3 + k_2) - k_2^2\} = 0 \end{aligned} \quad (5.9)$$

Persamaan 5.9 ini disebut dengan persamaan karakteristik dalam domain atau artian dari frekuensi, karena solusi dari persamaan menghasilkan nilai frekuensi sebagai karakteristik. Akar dari persamaan 5.9 dengan penerapan rumus *abc* adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \omega_1^2, \omega_2^2 = \frac{1}{2} \left\{ \frac{(k_1 + k_2) m_2 + (k_3 + k_2) m_1}{m_1 m_2} \right\} \mp \\ \frac{1}{2} \sqrt{\left\{ \frac{(k_1 + k_2) m_2 + (k_3 + k_2) m_1}{m_1 m_2} \right\}^2 - 4 \left\{ \frac{(k_1 + k_2)(k_3 + k_2) - k_2^2}{m_1 m_2} \right\}} \end{aligned} \quad (5.10)$$

Persamaan 5.10 menunjukkan kemungkinan sistem memiliki solusi non-trivial, yaitu solusi pada kondisi keduanya mengalami getaran, jika  $\omega$  sama dengan  $\omega_1$  atau  $\omega_2$  sesuai akar persamaan pada persamaan 5.10. Kita sebut  $\omega_1$  dan  $\omega_2$  adalah *frekuensi natural sistem*.

Harga  $X_1$  dan  $X_2$  yang berhubungan  $\omega_1$  adalah  $X_1^{(1)}$  dan  $X_2^{(1)}$  sedangkan yang berhubungan  $\omega_2$  adalah  $X_1^{(2)}$  dan  $X_2^{(2)}$ . Persamaan 5.8 menjadi homogen dan rasio  $r_1 = X_2^{(1)} / X_1^{(1)}$  dan  $r_2 = X_2^{(2)} / X_1^{(2)}$  dapat diperoleh. Untuk  $\omega = \omega_1^2$  dan  $\omega = \omega_2^2$ , persamaan 5.8 menghasilkan:

$$r_1 = \frac{X_2^{(1)}}{X_1^{(1)}} = \frac{-m_1 \omega_1^2 + (k_1 + k_2)}{k_2} = \frac{k_2}{-m_1 \omega_1^2 + (k_3 + k_2)} \quad (5.11)$$

$$r_1 = \frac{X_2^{(2)}}{X_1^{(2)}} = \frac{-m_1 \omega_2^2 + (k_1 + k_2)}{k_2} = \frac{k_2}{-m_2 \omega_2^2 + (k_3 + k_2)} \quad (5.12)$$

Dua rasio ini adalah identik. Sebagai *normal mode* didefinisikan sebagai vektor yang mewakili kumpulan getaran yang memenuhi syarat untuk terjadi dari getaran yang berhubungan dengan harga kuadrat frekuensi  $\omega_1^2$  dan  $\omega_2^2$ . Sehingga vektor normal mode dan dapat diekspresikan sebagai berikut:

$$X^{(1)} = \begin{bmatrix} X_1^{(1)} \\ X_2^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1^{(1)} \\ r_1 X_1^{(1)} \end{bmatrix}$$

dan

$$X^{(2)} = \begin{bmatrix} X_1^{(2)} \\ X_2^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1^{(2)} \\ r_2 X_1^{(2)} \end{bmatrix}$$

Vektor  $X^{(1)}$  dan  $X^{(2)}$  adalah normal mode dari getaran atau yang dikenal dengan istilah *modal vektor* dari sistem.

Solusi getaran bebas dari gerakan dalam domain waktu dapat diekspresikan sebagai berikut:

$$x^{(1)}(t) = \begin{bmatrix} x_1^{(1)}(t) \\ x_2^{(1)}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1^{(1)} \cos(\omega t + \phi_1) \\ r_1 X_1^{(1)} \cos(\omega t + \phi_1) \end{bmatrix} \text{ first mode} \quad (5.13)$$

$$x^{(2)}(t) = \begin{bmatrix} x_1^{(2)}(t) \\ x_2^{(2)}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1^{(2)} \cos(\omega t + \phi_2) \\ r_2 X_1^{(2)} \cos(\omega t + \phi_2) \end{bmatrix} \text{ second mode} \quad (5.14)$$

Konstanta  $X_1^{(1)}$  dan  $X_1^{(2)}$ ,  $\phi_1$  dan  $\phi_2$  ditentukan oleh kondisi awal. Dua persamaan gerak dari persamaan 5.1 dan persamaan 5.2 merupakan persamaan diferensial dengan turunan kedua dari waktu. Misalnya, kondisi awal berlaku untuk masing-masing massa sebagai berikut:

$$x_1(t=0) = X_1^{(1)} = \text{konstan}, \quad \dot{x}_1(t=0) = 0$$

$$x_2(t=0) = r_1 X_1^{(1)} = \text{konstan}, \quad \dot{x}_2(t=0) = 0$$

Namun demikian untuk kondisi awal umum, kedua mode akan tereksitasi. Solusi persamaan gerak yang diberikan oleh persamaan 5.4 dan 5.5 dapat disuperposisikan dari dua normal mode sesuai persamaan 5.13 dan persamaan 5.14 menjadi:

$$x(t) = x^{(1)}(t) + x^{(2)}(t)$$

Penjabaran persamaan sebelumnya adalah:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x_1^{(1)}(t) + x_1^{(2)}(t) = X_1^{(1)} \cos(\omega_1 t + \phi_1) + X_1^{(2)} \cos(\omega_2 t + \phi_2) \\ x_2(t) &= x_2^{(1)}(t) + x_2^{(2)}(t) = r_1 X_1^{(1)} \cos(\omega_1 t + \phi_1) + r_2 X_1^{(2)} \cos(\omega_2 t + \phi_2) \end{aligned} \quad (5.15)$$

Asumsi untuk initial condition diberikan seperti berikut:

$$\begin{aligned} x_1(t=0) &= x_1(0), \quad \dot{x}_1(t=0) = \dot{x}_1(0) \\ x_2(t=0) &= x_2(0), \quad \dot{x}_2(t=0) = \dot{x}_2(0) \end{aligned} \quad (5.16)$$

Diasumsikan juga dengan konstanta  $X_1^{(1)}$  dan  $X_1^{(2)}$ ,  $\phi_1$  dan  $\phi_2$ . Persamaan menjadi berikut ini.

$$\begin{aligned} x_1(0) &= X_1^{(1)} \cos \phi_1 + X_1^{(2)} \cos \phi_2 \\ \dot{x}_1(0) &= -\omega_1 X_1^{(1)} \sin \phi_1 - \omega_2 X_1^{(2)} \sin \phi_2 \\ x_2(0) &= r_1 X_1^{(1)} \cos \phi_1 + r_2 X_1^{(2)} \cos \phi_2 \\ \dot{x}_2(0) &= -\omega_1 r_1 X_1^{(1)} \sin \phi_1 - \omega_2 r_2 X_1^{(2)} \sin \phi_2 \end{aligned} \quad (5.17)$$

Persamaan 5.17 terdiri dari empat persamaan aljabar dengan parameter yang tidak diketahui, yaitu:  $X_1^{(1)} \cos \phi_1$ ,  $X_1^{(2)} \cos \phi_2$ ,  $X_1^{(1)} \sin \phi_1$  dan  $X_1^{(2)} \sin \phi_2$ . Solusi persamaan 5.17 dapat dicari dari penyelesaian persamaan simultan 5.17. seperti dinyatakan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} X_1^{(1)} \cos \phi_1 &= \frac{r_2 x_1(0) - x_2(0)}{r_2 - r_1}, \quad X_1^{(2)} \cos \phi_2 = \frac{-r_1 x_1(0) + x_2(0)}{r_2 - r_1} \\ X_1^{(1)} \sin \phi_1 &= \frac{-r_1 \dot{x}_1(0) + \dot{x}_2(0)}{\omega_1 (r_2 - r_1)}, \quad X_1^{(2)} \sin \phi_2 = \frac{r_1 \dot{x}_1(0) - \dot{x}_2(0)}{\omega_2 (r_2 - r_1)} \end{aligned}$$

Kita peroleh solusi yang diinginkan untuk ke-4 parameter, yaitu:

$$X_1^{(1)} = \sqrt{\left( X_1^{(1)} \cos \phi_1 \right)^2 + \left( X_1^{(1)} \sin \phi_1 \right)^2}$$



$$\begin{aligned}
&= \frac{I}{(r_2 - r_1)} \left[ \left\{ r_2 x_1(0) - x_2(0) \right\}^2 + \left\{ \frac{-r_1 \dot{x}_1(0) + \dot{x}_2(0)}{\omega_1} \right\}^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\
X_1^{(1)} &= \sqrt{\left( X_1^{(2)} \cos \phi_2 \right)^2 + \left( X_1^{(2)} \sin \phi_2 \right)^2} \\
&= \frac{I}{(r_2 - r_1)} \left[ \left\{ -r_1 x_1(0) + x_2(0) \right\}^2 + \left\{ \frac{r_1 \dot{x}_1(0) + \dot{x}_2(0)}{\omega_2} \right\}^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\
\phi_1 &= \tan^{-1} \left( \frac{X_1^{(1)} \sin \phi_1}{X_1^{(1)} \cos \phi_1} \right) = \tan^{-1} \left[ \frac{-r_2 \dot{x}_1(0) + \dot{x}_2(0)}{\omega_1 \{ r_2 x_1(0) - x_2(0) \}} \right] \\
\phi_2 &= \tan^{-1} \left( \frac{X_1^{(2)} \sin \phi_2}{X_1^{(2)} \cos \phi_2} \right) = \tan^{-1} \left[ \frac{r_1 \dot{x}_1(0) - \dot{x}_2(0)}{\omega_2 \{ -r_1 x_1(0) + x_2(0) \}} \right] \quad (5.18)
\end{aligned}$$

### Contoh 5.1

DDOF tanpa damper dengan frekwensi natural dan mode shape dari sistem pegas-massa, diperlihatkan pada Gambar 5.3. Ambil untuk harga  $n = 1$ . Diketahui sistem getaran dua derajat kebebasan seperti Gambar 5.3. Tentukan frekuensi natural dan mode shapes-nya.

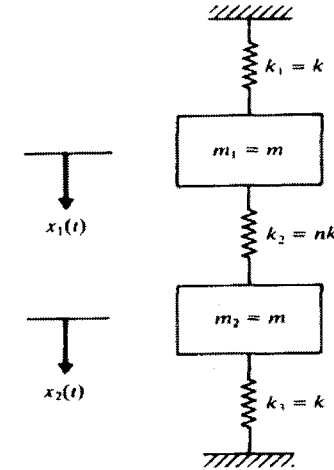
#### Jawab:

Dengan prosedur Newton dan asumsi penomoran benda untuk parameter DDOF adalah:  $x_1$  dan  $x_2$ , massa  $m_1$  dan  $m_2$ . Untuk  $n=1$  maka  $m_1=m_2=m$ , dan  $k_1 = k_2 = k$ . Persamaan keseimbangan adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
m \ddot{x}_1 + 2kx_1 - kx_2 &= 0 \\
m \ddot{x}_2 + 2kx_2 - kx_1 &= 0
\end{aligned}$$

Dengan mengasumsikan solusi persamaan transien dari getaran bebas sebagai harmonik, maka:

$$x_i(t) = X_i \cos(\omega t + \phi); \quad i = 1, 2$$



Gambar 5.3 Sket untuk Contoh 5.1

Persamaan karakteristik domain frekuensi dapat diperoleh dengan substitusikan persamaan di atas dengan persamaan sebelumnya, sehingga diperoleh:

$$\begin{vmatrix} (-m\omega^2 + 2k) & (-k) \\ (-k) & (-m\omega^2 + 2k) \end{vmatrix} = 0$$

atau dinyatakan dalam persamaan kuadrat menjadi:

$$m^2 \omega^4 - 4km\omega^2 + 3k^2 = 0$$

Solusi persamaan ini diperoleh dari penerapan rumus 'ABC' adalah persamaan untuk mendapatkan frekuensi natural yang diperoleh, yaitu sebagai berikut:

$$\omega_1 = \left\{ \frac{4km - \sqrt{16k^2m^2 - 12k^2m^2}}{2m^2} \right\}^{1/2} = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\omega_1 = \left\{ \frac{4km + \sqrt{16k^2m^2 - 12k^2m^2}}{2m^2} \right\}^{1/2} = \sqrt{\frac{3k}{m}}$$

Dari persamaan 5.11 dan 5.12, rasio amplitudo untuk gerakan ke-2 masa tersebut diperoleh:

$$r_1 = \frac{X_2^{(1)}}{X_1^{(1)}} = \frac{-m_1\omega_1^2 + 2k}{k} = \frac{k}{-m_1\omega_1^2 + 2k} = 1$$

$$r_2 = \frac{X_2^{(2)}}{X_1^{(2)}} = \frac{-m_1\omega_2^2 + 2k}{k} = \frac{k}{-m_2\omega_2^2 + 2k} = -1$$

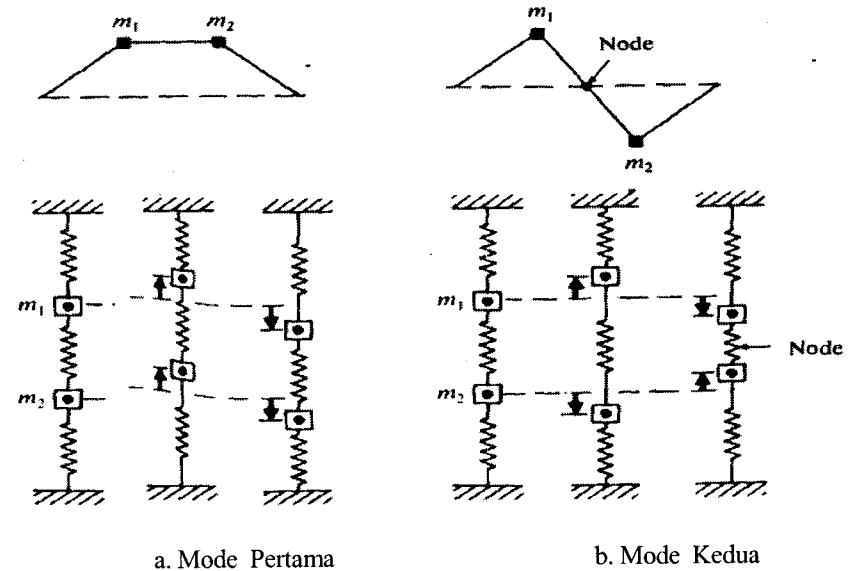
Mode natural diperoleh dengan mengikuti rumus sesuai persamaan 5.13 dan persamaan 5.14, sehingga:

$$x^{(1)}(t) = \begin{Bmatrix} X_1^{(1)} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \phi_1\right) \\ X_1^{(1)} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \phi_1\right) \end{Bmatrix} \text{ first mode}$$

$$x^{(2)}(t) = \begin{Bmatrix} X_1^{(2)} \cos\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}t + \phi_2\right) \\ -X_1^{(2)} \cos\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}t + \phi_2\right) \end{Bmatrix} \text{ second mode}$$

Hal ini dapat dinyatakan dari kedua persamaan ini, apabila sistem bergetar pada *first mode*, amplitudo dari kedua massa sama. Hal ini berimplikasi bahwa displacement antarpegas adalah tetap sehingga gerakan dari massa  $m_1$  dan  $m_2$  dapat dalam kondisi satu phase, sesuai Gambar 5.4a. Ketika sistem bergetar pada *second mode*, perpindahan dari dua massa memperlihatkan harga yang sama namun arahnya berlawanan sehingga gerakan massa  $m_1$  dan  $m_2$  berada pada kondisi  $180^\circ$  atau kondisi *out of phase* sesuai Gambar 5.4b. Dalam kasus ini *mode point* dari pertengahan pegas tetap diam untuk semua kondisi. Titik ini disebut *node*. Dengan menggunakan bentukan

seperti persamaan 5.15. Kita dapat melakukan evaluasi terhadap dua kondisi syarat awal yang sudah dibahas.



Gambar 5.4 Perpindahan pada massa  $m_1$  dan  $m_2$

Solusi umum dari persamaan getaran DDOF bebas tanpa redaman adalah sebagai berikut:

$$x_1(t) = X_1^{(1)} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \phi_1\right) + X_1^{(2)} \cos\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}t + \phi_2\right)$$

$$x_2(t) = X_1^{(1)} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \phi_1\right) - X_1^{(2)} \cos\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}t + \phi_2\right)$$

### Contoh 5.2

*Initial condition* diperlukan dan diaplikasikan pada sistem seperti pada Gambar 5.3 agar sistem mulai bergetar dalam (a) *first mode* dan (b) *second mode*. Pada sistem pegas-massa dua derajat kebebasan, tentukan initial condition yang diperlukan agar sistem bergetar dalam salah satu mode.

**Jawab:**

Seperti pada kasus sebelumnya, untuk initial condition yang berubah, pergerakan dari massa mengikuti hubungan sesuai persamaan 5.15 dan persamaan ini memberikan jawab untuk  $r_1=1$  dan  $r_1=-1$ . Persamaan 5.15 menjadi:

$$x_1(t) = X_1^{(1)} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \phi_1\right) + X_1^{(2)} \cos\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}t + \phi_2\right)$$

$$x_2(t) = X_1^{(1)} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \phi_1\right) - X_1^{(2)} \cos\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}t + \phi_2\right)$$

Asumsikan initial condition pada persamaan 5.16 memberikan konstanta  $X_1^{(1)}$  dan  $X_1^{(2)}$ ,  $\phi_1$  dan  $\phi_2$ . Semua konstanta ini ditentukan oleh persamaan 5.18 ditentukan dengan menggunakan  $r_1 = 1$  dan  $r_2 = -1$ . Persamaan yang dihasilkan adalah sebagai berikut:

$$X_1^{(1)} = -\frac{1}{2} \left[ \left\{ x_1(0) - x_2(0) \right\}^2 + \frac{m}{k} \left\{ \dot{x}_1(0) + \dot{x}_2(0) \right\}^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$X_1^{(2)} = -\frac{1}{2} \left[ \left\{ -x_1(0) + x_2(0) \right\}^2 + \frac{m}{3k} \left\{ \dot{x}_1(0) - \dot{x}_2(0) \right\}^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\phi_1 = \tan^{-1} \left[ \frac{-\sqrt{m} \left\{ \dot{x}_1(0) + \dot{x}_2(0) \right\}}{\sqrt{k} \left\{ x_1(0) + x_2(0) \right\}} \right]$$

$$\phi_2 = \tan^{-1} \left[ \frac{-\sqrt{m} \left\{ \dot{x}_1(0) - \dot{x}_2(0) \right\}}{\sqrt{3k} \left\{ -x_1(0) + x_2(0) \right\}} \right]$$

- (a) *First normal mode* atau 'Modus Getar Pertama' pada sistem seperti yang diberikan pada persamaan berikut ini, identik dengan Contoh 5.1:

$$x^{(1)}(t) = \begin{cases} X_1^{(1)} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \phi_1\right) \\ X_1^{(1)} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \phi_1\right) \end{cases} \text{ first mode}$$

Bandingkan persamaan ini dengan persamaan pertama. Gerakan dari sistem identik dengan *first normal mode* hanya jika  $X_1^{(2)} = 0$ . Hal ini dibutuhkan dengan kondisi batas sebagai berikut:

$$x_1(0) = x_2(0) \text{ dan } \dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0)$$

- (b) *Second normal mode* dari sistem seperti yang diberikan pada persamaan di bawah ini sesuai dengan Contoh 5.1, yaitu:

$$x^{(2)}(t) = \begin{cases} X_1^{(2)} \cos\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}t + \phi_2\right) \\ -X_1^{(2)} \cos\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}t + \phi_2\right) \end{cases} \text{ second mode}$$

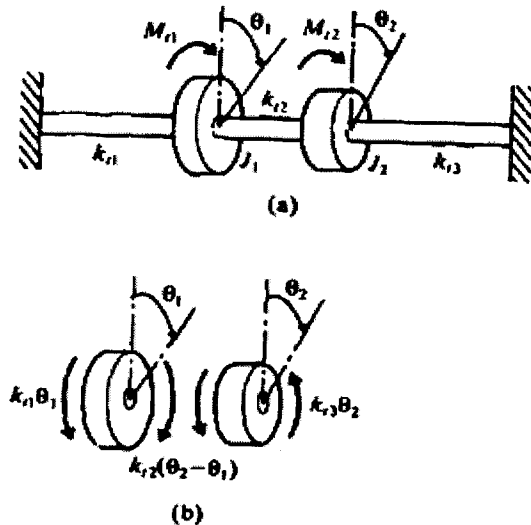
Bandingkan persamaan terakhir ini dengan persamaan pertama yang dinyatakan setelah Contoh 5.2, untuk  $x_1(t)$  dan  $x_2(t)$ . Terlihat bahwa gerakan sistem menjadi berimpit dengan *second normal mode* hanya jika  $X_1^{(1)} = 0$ . Hal ini perlu untuk kondisi batas lain seperti berikut:

$$x_1(0) = -x_2(0) \text{ dan } \dot{x}_1(0) = -\dot{x}_2(0)$$

### 5.3 DDOF untuk Getaran Torsi

Gerakan torsi timbul dari putaran poros pada lokasi dekat tumpuan atau bantalan pada posisi dua roda gigi akibat kondisi tak balance dari gerakan poros-roda gigi yang bersangkutan. Torsi dekat dua tumpuan ini cenderung pada dua arah yang berbeda satu sama lain. Perhatikan sistem torsional untuk dua DOF yang terdiri dari dua piringan yang menempel pada sebuah poros seperti yang terlihat pada Gambar 5.5. Sistem torsi ini merupakan penyederhanaan dari gerakan dua roda gigi yang berputar dalam satu poros.

Tiga segmen dari poros yang berputar memiliki konstanta  $k_{t1}$ ,  $k_{t2}$  dan  $k_{t3}$ .  $k_{t1}$  mewakili sifat pegas torsi antara tumpuan kiri sampai piringan pertama kiri,  $k_{t2}$  mewakili sifat kekakuan poros bagian tengah, dan  $k_{t3}$  mewakili kekakuan poros sebagai pegas torsi bagian kanan. Parameter lain untuk pernyataan persamaan getaran torsi adalah momen inersia massa  $J_1$  dan  $J_2$ . Torsi masing-masing piringan dinotasikan sebagai  $M_{t1}$  dan  $M_{t2}$ , dan sudut putar dari poros pada sisi kiri dan kanan piringan dengan notasi  $\theta_1$  dan  $\theta_2$ . Getaran dengan displacement untuk gerakan lurus dinyatakan sebagai sudut putar  $\theta_1$  dan  $\theta_2$  untuk getaran torsi ini.



Gambar 5.5 Sistem torsional dua derajat kebebasan

Persamaan getaran torsi DDOF sebagai persamaan diferensial dari gerak berputar untuk piringan  $J_1$  dan  $J_2$ . Persamaan ini dapat diturunkan dengan prosedur metode Newton, dan hasilnya adalah sebagai berikut:

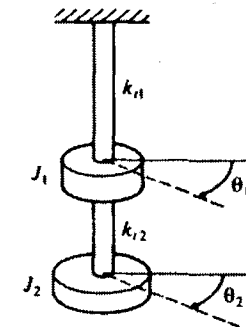
$$\begin{aligned} J_1 \ddot{\theta}_1 &= -k_{t1}\theta_1 + k_{t2}(\theta_2 - \theta_1) + M_{t1} \\ J_2 \ddot{\theta}_2 &= -k_{t2}(\theta_2 - \theta_1) - k_{t3}\theta_2 + M_{t2} \end{aligned} \quad (5.19)$$

Persamaan 5.19 disusun ulang menjadi:

$$\begin{aligned} J_1 \ddot{\theta}_1 + (k_{t1} + k_{t2})\theta_1 - k_{t2}\theta_2 &= M_{t1} \\ J_2 \ddot{\theta}_2 - k_{t2}\theta_1 + (k_{t3} + k_{t2})\theta_2 &= M_{t2} \end{aligned} \quad (5.20)$$

### Contoh 5.3

Tentukan frekuensi natural dari sistem torsional DDOF seperti diperlihatkan pada Gambar 5.6. Asumsi parameter dinyatakan untuk:  $J_1 = J_0$ ,  $J_2 = 2J_0$ , dan  $k_{t1} = k_{t2} = k_t$ .



Gambar 5.6 Getaran torsional DDOF untuk Contoh 5.3

Jawab:

Diketahui sistem pegas-massa dua derajat kebebasan seperti pada Gambar 5.6. Persamaan diferensial sebagai persamaan getaran torsi untuk contoh 5.2 memberikan asumsi dengan parameter sebagai berikut:  $M_{t1} = M_{t2} = k_{t3} = 0$ ,  $J_1 = J_0$ ,  $J_2 = 2J_0$ , dan  $k_{t1} = k_{t2} = k_t$ . Persamaan getaran torsi menjadi:

$$J_0 \ddot{\theta}_1 + 2k_t\theta_1 - k_t\theta_2 = 0$$

$$2J_0 \ddot{\theta}_2 - k_t\theta_1 + k_t\theta_2 = 0$$

Persamaan ini disusun ulang dengan asumsi solusi harmonik berikut:

$$\theta_i(t) = \Theta_i \cos(\omega t + \phi); \quad i = 1, 2$$

Memberikan persamaan karakteristik frekuensi sebagai berikut:

$$2\omega^4 J_0^2 - 5\omega^2 J_0 k_t + k_t^2 = 0$$

Akar dari persamaan di atas merupakan frekuensi natural dengan dua mode shape, yaitu:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k_t}{4J_0}(5 - \sqrt{17})} \quad \text{dan} \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k_t}{4J_0}(5 + \sqrt{17})}$$

## 5.4 Getaran Paksa dengan Solusi Impedansi dan Invers

Analisis getaran berikut ini menggunakan prosedur dengan penggunaan asumsi kelompok persamaan karakteristik frekuensi untuk solusi impedansi dan metode numerik persamaan simultan untuk solusi inversi, digunakan dalam mengatasi penyelesaian persamaan getaran ini. Persamaan umum gerak untuk sistem dua derajat kebebasan dengan eksitasi berupa gaya dalam matriks kolom, dapat ditulis sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} \quad (5.21)$$

Persamaan 5.1 merupakan kasus khusus dari persamaan 5.21. Harga parameter  $m_{11} = m_1$ ,  $m_{22} = m_2$  dan  $m_{12} = 0$ .  $c_{11}$  sampai  $c_{22}$  dan juga untuk ' $k_{ij}$ ', dapat terdiri dari rangkaian koefisien. Asumsikan eksitasi asumsi gaya eksponensial ' $F_j(t)$ ' sebagai fungsi harmonik dengan:

$$F_j(t) = F_{j0} e^{i\omega t}, \quad j = 1, 2 \quad (5.22)$$

' $\omega$ ' adalah frekuensi dari penerapan gaya eksitasi. Kita dapat menyatakan persamaan displacement solusi steady state dalam kondisi tunak dengan:

$$x_j(t) = X_j e^{i\omega t}, \quad j = 1, 2 \quad (5.23)$$

' $X_1$  dan  $X_2$ ' adalah displacement maksimum masing-masing benda dalam bilangan kompleks sebagai fungsi dari ' $\omega$ ' dan parameter sistem lain. Substitusikan persamaan 5.22, dan 5.23 ke persamaan 5.21, diperoleh:

$$\begin{bmatrix} (-\omega^2 m_{11} + i\omega c_{11} + k_{11}) & (-\omega^2 m_{12} + i\omega c_{12} + k_{12}) \\ (-\omega^2 m_{22} + i\omega c_{12} + k_{12}) & (-\omega^2 m_{22} + i\omega c_{22} + k_{22}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{10} \\ F_{20} \end{Bmatrix} \quad (5.24)$$

Didefinisikan *Matriks Impedansi* mekanis dengan notasi  $Z_{rs}(i\omega)$  dan asumsi persamaan dinyatakan sebagai berikut:

$$Z_{rs}(i\omega) = -\omega^2 m_{rs} + i\omega c_{rs} + k_{rs}, \quad r, s = 1, 2 \quad (5.25)$$

Persamaan 5.24 dinyatakan dengan impedansi sebagai berikut:

$$[Z_{rs}(i\omega)] X = F_0 \quad (5.26)$$

$$[Z_{rs}(i\omega)] = \begin{bmatrix} Z_{11}(i\omega) & Z_{12}(i\omega) \\ Z_{21}(i\omega) & Z_{22}(i\omega) \end{bmatrix}, \quad X = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix}, \quad \text{dan} \quad F_0 = \begin{Bmatrix} F_{10} \\ F_{20} \end{Bmatrix}$$

Solusi persamaan 5.26 dilakukan dengan metode inversi persamaan berikut:

$$X = [Z_{rs}(i\omega)]^{-1} F_0 \quad (5.27)$$

Inversi matriks impedansi diberikan sesuai persamaan di bawah ini:

$$[Z_{rs}(i\omega)]^{-1} = \frac{1}{Z_{11}(i\omega)Z_{22}(i\omega) - Z_{12}^2(i\omega)} \begin{bmatrix} Z_{22}(i\omega) & -Z_{12}(i\omega) \\ -Z_{12}(i\omega) & Z_{11}(i\omega) \end{bmatrix} \quad (5.28)$$

Persamaan 5.28 dan 5.27 memberikan:

$$\begin{aligned} X_1(i\omega) &= \frac{Z_{22}(i\omega)F_{10} - Z_{12}(i\omega)F_{20}}{Z_{11}(i\omega)Z_{22}(i\omega) - Z_{12}^2(i\omega)} \\ X_2(i\omega) &= \frac{-Z_{12}(i\omega)F_{10} + Z_{11}(i\omega)F_{20}}{Z_{11}(i\omega)Z_{22}(i\omega) - Z_{12}^2(i\omega)} \end{aligned} \quad (5.29)$$

Dengan melakukan substitusi persamaan 5.29 ke dalam persamaan 5.23, maka kita peroleh solusi displacement total (persamaan transien dan steady state) dari  $x_1(t)$  dan  $x_2(t)$ .

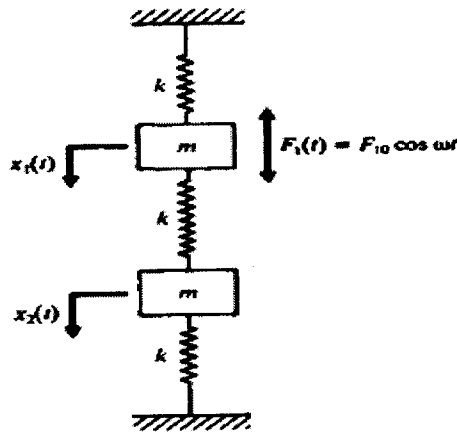
**Contoh 5.4**

Tentukan respons sistem pegas-massa dua derajat kebebasan tak teredam yang diperlihatkan pada Gambar 5.7 dalam kondisi tunak. 'm<sub>1</sub>' diberi eksitasi asumsi gaya  $F_1(t) = F_{10} \cos \omega t$ . Sistem pegas-massa dua derajat kebebasan tak teredam. Eksitasi gaya diberikan seperti pada Gambar 5.7. Tentukan persamaan respons dinamik solusi displacement dari dua benda.

**Jawab:**

Persamaan gerak sistem getaran DDOF tanpa redaman dapat diekspresikan sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{10} \cos \omega t \\ 0 \end{Bmatrix}$$



Gambar 5.7 Sistem torsional DDOF untuk Contoh 5.4

Persamaan di atas dapat dibandingkan dengan persamaan 5.24, tetapi dengan parameter getaran berikut ini:

$$m_{11} = m_{22} = m, \quad m_{12} = 0, \quad c_{11} = c_{12} = 0$$

$$k_{11} = k_{22} = 2k, \quad k_{12} = -k,$$

$$F_1(t) = F_{10} \cos \omega t, \quad F_2 = 0$$

Kita asumsikan solusi persamaan transien dengan bentuk harmonis cosinus sebagai berikut;

$$x_j(t) = X_j \cos \omega t; \quad j = 1, 2$$

Koefisien matriks dari Persamaan Impedansi 5.25 menjadi:

$$Z_{11}(\omega) = Z_{22}(\omega) = -\omega^2 m + 2k, \quad Z_{12}(\omega) = -k$$

Sehingga persamaan displacement solusi total (transien dan steady state) dalam koefisien impedansi seperti persamaan 5.29 menjadi:

$$X_1(\omega) = \frac{(-\omega^2 m + 2k) F_{10}}{(-\omega^2 m + 2k)^2 - k^2} = \frac{(-\omega^2 m + 2k) F_{10}}{(-\omega^2 m + 3k)(-\omega^2 m + k)}$$

Dan untuk  $X_2(\omega)$  menjadi:

$$X_2(\omega) = \frac{k F_{10}}{(-\omega^2 m + 2k)^2 - k^2} = \frac{k F_{10}}{(-\omega^2 m + 3k)(-\omega^2 m + k)}$$

Dengan mendefinisikan  $\omega_1^2 = k/m$  dan  $\omega_2^2 = 3k/m$ , maka kedua persamaan di atas dapat disederhanakan dalam bentuk lain, yaitu:

$$X_1(\omega) = \frac{\left\{ 2 - \left( \frac{\omega}{\omega_1} \right)^2 \right\} F_{10}}{k \left[ \left( \frac{\omega_2}{\omega_1} \right)^2 - \left( \frac{\omega}{\omega_1} \right)^2 \right] \left[ 1 - \left( \frac{\omega}{\omega_1} \right)^2 \right]}$$

$$X_2(\omega) = \frac{F_{10}}{k \left[ \left( \frac{\omega_2}{\omega_1} \right)^2 - \left( \frac{\omega}{\omega_1} \right)^2 \right] \left[ 1 - \left( \frac{\omega}{\omega_1} \right)^2 \right]}$$

## 5.5 Getaran Paksa DDOF Solusi Metode Rayleigh

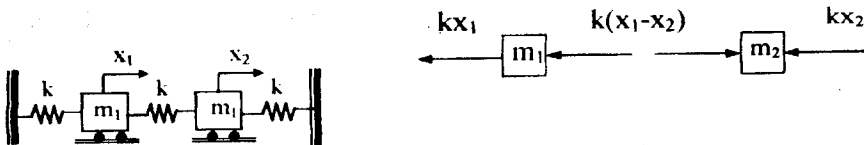
Tinjauan untuk mendapatkan jawaban persamaan displacement total dalam bentuk *persamaan transien dan steady state* dari getaran antara lain, dapat dilakukan dengan menggunakan *Metode Rayleigh*. Metode Rayleigh fokus pada persamaan karakteristik frekuensi, kemudian metode ini memberikan prosedur penyelesaian selanjutnya. Berawal dari persamaan ini, prosedur metode Rayleigh diberlakukan dengan menjadikan *Persamaan Couple* yang dalam bentuk matriks menjadi *Persamaan Decouple* dalam bentuk *Displacement Koordinat Transformasi*. Sebagai langkah awal, dibahas dahulu analisis getaran sistem tanpa redaman DDOF sesuai contoh kasus pada Gambar 5.8. Koordinat dalam notasi  $x_1$  dan  $x_2$  ditentukan dari acuan gerakan inersia benda.

Penerapan metode Rayleigh dilakukan untuk DDOF dari persamaan diferensial getaran untuk sistem, sebagai berikut:

$$\begin{aligned} 2m\ddot{x}_2 &= k(x_1 - x_2) - kx_2 \\ m\ddot{x}_1 &= -k(x_1 - x_2) - kx_1 \end{aligned}$$

Solusi total didefinisikan sebagai fungsi eksponensial harmonik sebagai berikut: osilasi ragam normal didefinisikan sebagai osilasi, dan setiap massa melakukan gerak harmonik dengan frekuensi sama. Hal ini terjadi karena diasumsikan kedua massa melewati posisi kesetimbangan pada waktu yang sama, yaitu:

$$x_1 = A_1 e^{i\omega t}, \text{ dan } x_2 = A_2 e^{i\omega t} \quad (5.30)$$



Gambar 5.8 Sistem getaran DDOF tanpa redaman

Pernyataan lain untuk modus getar atau *mode shape* agar lebih mudah dipahami dinyatakan sebagai cara suatu sistem untuk bergetar. Untuk sistem DDOF, terdapat dua modus getar yaitu, modus getar pertama berkaitan dengan frekuensi pribadi benda pertama, dan modus getar kedua berkaitan dengan frekuensi pribadi benda kedua. Jumlah modus getar sama dengan jumlah *degree of freedom*. Bila persamaan 5.30 dan persamaan sebelumnya

digabung maka persamaan karakteristik frekuensi akan diperoleh sebagai berikut:

$$(2k - \omega^2 m)A_1 - kA_2 = 0 \quad (5.31a)$$

$$-kA_1 + (2k - 2\omega^2 m)A_2 = 0 \quad (5.31b)$$

Persamaan 5.1 mempunyai jawab untuk setiap harga  $A_1$  dan  $A_2$  jika *Determinan Persamaan* sama dengan nol, atau kondisi:

$$\begin{bmatrix} (2k - \omega^2 m) & -k \\ -k & (2k - 2\omega^2 m) \end{bmatrix} = 0 \quad (5.32)$$

Dengan mengambil asumsi harga ' $\omega^2 = \lambda$ ', Determinan persamaan 5.32 menghasilkan persamaan karakteristik frekuensi sebagai berikut:

$$\lambda_1 = \left( \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3} \right) \frac{k}{m} = 0.634 \frac{k}{m} \quad (5.33a)$$

$$\lambda_2 = \left( 3 \frac{k}{m} \right) \lambda_1 + \frac{3}{2} \left( \frac{k}{m} \right)^2 = 0 \quad (5.33b)$$

Diperoleh dua frekuensi natural, yaitu:

$$\omega_1 = \lambda_1^{0.5} = \sqrt{0.634 \frac{k}{m}} \quad (5.34a)$$

$$\omega_2 = \lambda_2^{0.5} = \sqrt{2.366 \frac{k}{m}} \quad (5.34b)$$

Substitusikan persamaan frekuensi natural 5.34 ke dalam persamaan (5.31), dan memungkinkan untuk mendapatkan rasio amplitudo. Bila  $\omega_1^2 = 0.634 k/m$  diperoleh, maka rasio amplitudo menjadi:

$$\left( \frac{A_1}{A_2} \right)^{(1)} = \frac{k}{2k - \omega_1^2 m} = \frac{1}{2 - 0.634} = 0.731 \text{ dan } \omega_2^2 = 0.634 k/m,$$

$$\left( \frac{A_1}{A_2} \right)^{(2)} = \frac{k}{2k - \omega_2^2 m} = \frac{1}{2 - 2.366} = -2.73$$

Prosedur metode Rayleigh dengan urutan dinyatakan berikut ini: a. menyusun matriks persamaan getaran, b. menentukan eigenvalue, c. Menentukan eigenvector, 'd'. menentukan ortogonal eigenvector, e. menentukan rayleigh damping, dan f. membuat persamaan getaran bentuk tidak gendeng atau *decoupled*. Berikut ini contoh perhitungan dengan data untuk getaran dan langsung disampaikan sebagai persamaan getaran DDOF dengan koefisien matriks  $[m]$ ,  $[c]$ ,  $[k]$ , dan  $\{F\}$  sudah ditentukan sebelumnya.

### 1. Menyusun Matriks Persamaan Getaran

Penyusunan matriks getaran dapat dilakukan dengan metode Newton. Misalkan diperoleh dalam bentuk matriks sebagai berikut:

$$[m]\{\ddot{q}\} + [c]\{\dot{q}\} + [k]\{q\} = \{F\}$$

Dengan koefisien matriks massa, matriks damping, dan matriks kekakuan, merujuk persamaan getaran pada awal pembahasan sub bab 1.5, sebagai berikut:

$$m = \begin{bmatrix} 143,5 & 0 \\ 0 & 18,798 \end{bmatrix}, c = \begin{bmatrix} 1756,36 & -73,59 \\ -72,59 & 634,74 \end{bmatrix}, k = \begin{bmatrix} 13193,54 & 2803,559 \\ 2803,559 & 4097,514 \end{bmatrix}$$

### 2. Menentukan Eigenvalue

Eigen value adalah harga karakteristik dengan notasi ' $\lambda_i$ '. Prosedur ini untuk mencari akar-akar persamaan karakteristik frekuensi dari harga eigenvalue yang diperoleh, dengan tahapan sebagai berikut:

- a. Membuat persamaan determinan persamaan karakteristik frekuensi sama dengan nol, sebagai berikut:

$$|A - \lambda I| = 0 \quad (5.35)$$

'I' merupakan matriks identitas. Untuk menyederhanakan,  $[m]$  ditulis sebagai M dan  $[k]$  dinyatakan sebagai K, sehingga pada penurunan selanjutnya, matriks identitas dinyatakan sebagai:

$$I = M^{-1}M; \text{ sehingga } A = M^{-1}K \quad (5.36)$$

$$M^{-1} = \frac{1}{2697,513} \begin{bmatrix} 18,798 & 0 \\ 0 & 143,5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,0070 & 0 \\ 0 & 0,0532 \end{bmatrix}$$

$$I = \begin{bmatrix} 0,0070 & 0 \\ 0 & 0,0532 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 143,35 & 0 \\ 0 & 18,798 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- b. Menentukan harga Eigenvalue

$$A = \begin{bmatrix} 0,0070 & 0 \\ 0 & 0,0532 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 13193,54 & 2803,559 \\ 2803,559 & 4097,514 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 91,9410 & 19,5370 \\ 149,1413 & 217,9761 \end{bmatrix}$$

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} (91,9410 - \lambda) & 19,5370 \\ 149,1413 & (217,9761 - \lambda) \end{vmatrix} = 0$$

Harga eigenvalue diperoleh sebagai berikut:

$$\lambda_1 = 71,9828$$

$$\lambda_2 = 237,9343$$

- c. Menentukan frekuensi pribadi:

$$\omega_1^2 = \lambda_1 \text{ maka, } \omega_1 = 8,4843 \text{ rad/det}$$

$$\omega_2 = 15,4251 \text{ rad/det}$$

### 3. Menentukan Eigenvector

Eigenvector dinyatakan dengan mengasumsikan salah satu komponen vektor sama dengan satu, dan notasi untuk komponen vektor dinyatakan sebagai  $\phi$ . Eigenvector diberlakukan untuk setiap gerakan benda, sehingga:

- a. Untuk  $\lambda_1 = 71,9828$

$$|A - \lambda I| = \begin{bmatrix} 19,9582 & 19,5270 \\ 149,1413 & 145,993 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$= 19,9582(\phi_{11}) + 19,5370(1) = 0$$

$$\phi_{11} = -0,9789$$

$$\phi_{21} = 1 \text{ (diasumsikan)}$$

- b. Untuk  $\lambda_2 = 237,9343$

$$|A - \lambda I| = \begin{bmatrix} -145,9333 & 19,5270 \\ 149,1413 & -19,9582 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$= 149,1413(\phi_{21}) + 19,9582(1) = 0$$

$$\phi_{12} = 0,1338$$

$$\phi_{22} = 1 \text{ (diasumsikan)}$$



Sehingga eigenvector untuk setiap DOF menjadi:

$$\theta_1 = \begin{Bmatrix} -0,9789 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad \text{dan} \quad \theta_2 = \begin{Bmatrix} -0,9789 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

#### 4. Menentukan Orthonormal Eigenvector

Orgonalitas eigenvector dinyatakan dengan persamaan berikut ini:

$$\alpha_n^2 \sqrt{\{\phi\}_n^T [M] \{\phi\}_n} = 1 \quad (5.37)$$

Sesuai contoh kasus, '  $\phi_1$  ' didefinisikan sebagai bilangan faktorial  $\alpha_n$  dan '  $\alpha_1$  dan  $\alpha_2$  ', dengan persamaan:

$$\alpha_1^2 \begin{Bmatrix} -0,9789 \\ 1 \end{Bmatrix}_1^T \begin{bmatrix} 143,5 & 0 \\ 0 & 18,798 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -0,9789 \\ 1 \end{Bmatrix}_1 = 1$$

$\alpha_1^2 \{137,508 + 18,798\} = 1$  Jika diterapkan rumus ABC, maka:

Diperoleh harga  $\alpha_1 = 0,08$  dan  $\alpha_2 = 0,2163$ , sehingga:

$$\phi_1 = 0,08 \begin{Bmatrix} -0,9789 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0,0783 \\ 0,08 \end{Bmatrix}$$

$$\phi_2 = 0,2163 \begin{Bmatrix} 0,1338 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,0289 \\ 0,2163 \end{Bmatrix}$$

Orthonormal eigenvector disebut *modal matriks*, dan matriks ini merupakan gabungan eigenvector setiap DOF, atau  $\{\phi_1, \phi_2\}$ , sehingga

$$\phi = [\{\phi_1\} \quad \{\phi_2\}] = \begin{bmatrix} -0,0783 & 0,0289 \\ 0,08 & 0,2163 \end{bmatrix}$$

#### 5. Menentukan Rayleigh Damping

Rayleigh Damping merupakan konstanta yang memenuhi persamaan berikut ini:

$$[\tilde{C}] = \alpha [M] + \beta [K] \quad (5.38)$$

Harga '  $\alpha$  dan  $\beta$  ' merupakan satu harga untuk orde persamaan getaran berapapun, padahal dua persamaan getaran atau DDOF sudah cukup

dan ideal untuk mendapatkan dua koefisien Rayleigh Damping. Itulah sebabnya metode ini efektif untuk diterapkan pada DDOF. Pengembangan analisis lebih jauh, penggunaan metode ini untuk persamaan getaran yang >2 DOF dapat dilakukan dengan syarat beberapa persamaan lainnya dapat mempunyai nilai epsilon terhadap salah satu persamaan getaran yang dipilih. Persamaan simultan yang terbentuk hanya dua sebagai solusi ideal, sesuai dari hanya dua *Konstanta Rayleigh Damping* ( $\alpha$  dan  $\beta$ ), sesuai persyaratan yang diinginkan. Umumnya, kondisi persamaan simultan dengan solusi riil yang ideal, mempunyai persamaan kombinasi linear dengan harga Konstanta mendekati, yaitu harga *sekitar* harga '  $\alpha$  dan  $\beta$  '. generalisasi untuk mendapatkan harga sekitar Konstanta tersebut, dilakukan dengan *Metode Weighted Residual*.

Idealnya persamaan simultan satu sama lain mendekati identik atau dengan nilai setara. Sebagai contoh, satu persamaan independen, 2 persamaan lain identik, yaitu  $xa + xb = 3$  dan persamaan berikutnya  $2xa + 2xb = 6$ . Tetapi persamaan ke-4, dengan  $2.01xa + 1.98xb = 5.89$  6 masih dikatakan identik dengan epsilon dapat ditoleransi, dan MDOF dengan epsilon sesuai persyaratan merupakan kondisi getaran lamp mass atau bongkah massa yang mendekati ideal.

Untuk DDOF kasus ini, Rayleigh Damping diperoleh dengan persamaan berikut:

$$\begin{bmatrix} 1756,36 & 0 \\ 0 & 634,74 \end{bmatrix} \alpha \begin{bmatrix} 143,5 & 0 \\ 0 & 18,798 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 13193,54 & 0 \\ 0 & 4097,514 \end{bmatrix}$$

$$143,5\alpha + 13193,54\beta = 1756,36$$

$$20853,92 + 4097,514\beta = 634,74$$

Dengan cara eliminasi didapat:

$$\alpha = -3,39 \quad \text{dan} \quad \beta = 0,17$$

Cek perhitungan berikut ini tidak begitu bermanfaat karena penerapan untuk DDOF, tetapi tidak demikian halnya untuk aplikasi MDOF dengan metode Rayleigh. Persamaan selanjutnya dikatakan dengan harga epsilon relatif kecil. Persamaan tersebut adalah:

$$\phi' [C] \phi = \alpha I + \beta \lambda \quad (5.39)$$

Dengan memasukkan semua parameter yang diperoleh maka:

$$\begin{bmatrix} 0,0783 & 0,0289 \\ 0,08 & 0,2163 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1756,4 & 476,6 \\ 476,6 & 632,9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0,0783 & 0,0289 \\ 0,08 & 0,2163 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8,8471 & 0 \\ 0 & 370588 \end{bmatrix}$$

#### 6. Membuat Persamaan Getaran tidak Gandeng atau Decoupled

Koordinat  $y_i(t)$  diasumikan, hasil transformasi sesuai persamaan di bawah ini. Persamaan ini sebenarnya tidak perlu lagi dinyatakan sebagai matriks, karena sudah merupakan persamaan dua SDOF sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} \quad (5.40)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 8,8471 & 0 \\ 0 & 37,0588 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 71,9828 & 0 \\ 0 & 237,9343 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 8,8471 y_1 \\ 37,0588 y_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 71,9828 y_1 \\ 237,9343 y_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix}$$

di mana:

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{bmatrix}^T \begin{Bmatrix} K_f \\ -K_f a \end{Bmatrix} Z_1 + \begin{bmatrix} K_f \\ -K_f a \end{bmatrix} Z_2 + \begin{bmatrix} C_f \\ C_f a \end{bmatrix} Z_1 + \begin{bmatrix} G_f \\ C_f b \end{bmatrix} Z_2 =$$

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,00147 & -0,0069 \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{bmatrix}^T \begin{Bmatrix} K_f \\ -K_f a \end{Bmatrix} Z_1 + \begin{bmatrix} K_f \\ -K_f a \end{bmatrix} Z_2 + \begin{bmatrix} C_f \\ C_f a \end{bmatrix} Z_1 + \begin{bmatrix} C_f \\ C_f b \end{bmatrix} Z_2 =$$

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,00147 & -0,0069 \\ 0,08320 & 0,00122 \end{bmatrix}^T \begin{Bmatrix} 3176,36 \\ -2231,075 \end{Bmatrix} (0,05 \sin 23,25t) + \begin{Bmatrix} 10017,18 \\ 5034,634 \end{Bmatrix} (0,05 \sin 23,25t)$$

$$\begin{Bmatrix} 793,64 \\ -557,452 \end{Bmatrix} (1,1625 \cos 23,25t) + \begin{Bmatrix} 962,72 \\ 483,863 \end{Bmatrix} (1,1625 \cos 23,25t + 2,522)$$

$$= \begin{Bmatrix} -21,359 \sin 23,25t - 19,079 \sin(23,25t + 2,522) - 124,081 \cos 23,25t - 42,631 \cos(23,25t + 2,522) \\ -19,539 \sin 23,25t + 68,923 \sin(23,25t + 2,522) - 113,505 \cos 23,25t + 154 \cos(23,25t + 2,522) \end{Bmatrix}$$

Persamaan yang didapatkan untuk  $v = 40$  km/jam adalah:

$$\ddot{y}_1 + 12,215 \dot{y}_1 + 91,81 y_1 = -4,55 \sin 46,472t - 21,38 \sin(46,472t + 25,22) :$$

$$\ddot{y}_2 + 0,0266 \dot{y}_2 + 0,168 y_2 = -257,7 \sin 46,472t - 0,378 \sin(46,472t + 25,22)$$

### 5.6 Ringkasan

Pada analisis persamaan gerak untuk sistem dua derajat kebebasan ditemui konfigurasi amplitudo dua derajat kebebasan yang disebut dengan *normal mode*, yaitu fenomena sistem bergetar pada salah satu frekuensi naturalnya.

Analisis pada sistem getaran dua derajat kebebasan dilakukan pada getaran bebas tak teredam, torsional, dan getaran dengan eksitasi. Jawaban permasalahan getaran dua derajat kebebasan melibatkan metode perhitungan matriks untuk mendapatkan solusi persamaan respons-nya. Salah satu solusi yang ideal untuk DDOF adalah prosedur metode Rayleigh.

### 5.7 Pertanyaan untuk Pemahaman

1. Sebutkan 4(empat) contoh DDOF dan diskripsikan masing-masing dengan contoh, ditinjau dari: variasi koordinat, macam benda, beban yang bergetar atau berayun, persamaan getaran DDOF, dan persamaan getaran DDOF-nya!

2. Sebutkan 3 (tiga) kegunaan prosedur metode Newton!

Sebutkan prosedur metode Newton dengan menyertakan contoh dari gambar berikut, yaitu Gambar 1.8b, 1.9, 1.15, gambar pada Soal 4 Bab 6, dan gambar Soal 8 Bab 6!

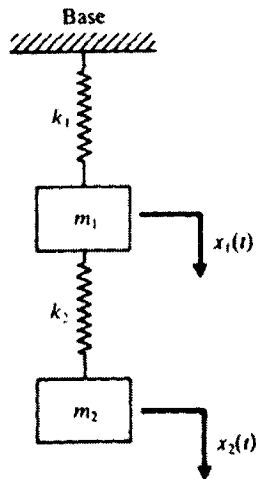
3. Selain dengan metode Rayleigh, jelaskan 4(empat) cara lain untuk penyelesaian DDOF mengikuti asumsi eksitasi gaya yang berbeda! Tulis 4(empat) persamaan getaran DDOF masing-masing!

4. Sebutkan 6(enam) prosedur penyelesaian Metode Rayleigh! Jelaskan mengapa metode ini ideal untuk DDOF dan tidak untuk DOF>2, dan dalam kondisi persamaan getaran MDOF simultan kondisi seperti apa metode ini masih relevan untuk digunakan? Bagaimana solusinya?

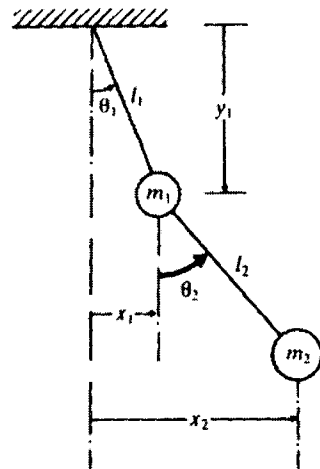
5. Terangkan pasangan pengertian atau istilah berikut ini, sehingga jelas perbedaannya:
  - a. Persamaan getaran couple dan decouple.
  - b. Modus perpindahan dan modus getar.
  - c. Lamp mass (bongkah massa) dan Continuous mass.
  - d. Solusi transien dan solusi steady state.
  - e. Eigenvalue dan Eigenvector.

### 5.8 Soal

1. Tentukan rumus dari frekuensi natural sistem pada gambar soal No. 1 dengan  $m_1 = m$  dan  $m_2 = 2m$ ,  $k_1 = k$  dan  $k_2 = 2k$ . Tentukan juga persamaan respons displacement dari sistem ketika  $k = 1000$  N/m,  $m = 20$  kg, dan initial value dari displacement dari massa  $m_1$  dan  $m_2$  adalah 1(satuan) dan -1 (satuan)!



Gambar soal No.1

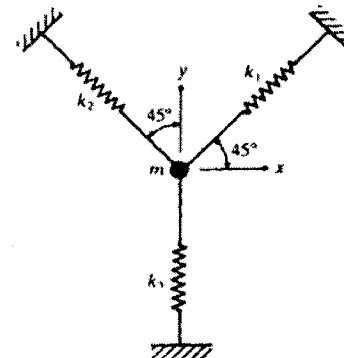


Gambar soal No.2

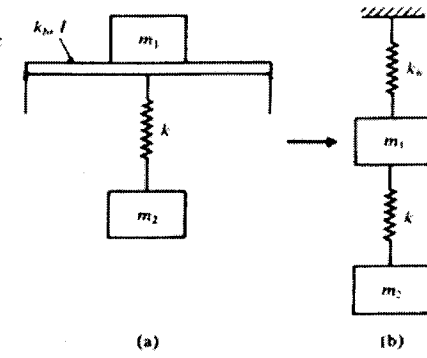
2. Turunkan persamaan diferensial getaran dari double pendulum seperti terlihat pada gambar soal nomor 2! Gunakan koordinat  $x_1$  dan  $x_2$  dan asumsikan amplitudo kecil. Temukan persamaan frekuensi natural, rasio

amplitudo, dan lokasi node untuk dua mode getaran  $m_1 = m_2 = m$ , dan  $l_1 = l_2 = l$ !

3. Tentukan *mode shape* atau modus getar dan natural frekuensi dari gambar soal nomor 1, untuk  $m_1 = m_2 = m$  dan  $k_1 = k_2 = k$ !
4. Tentukan mode shape dan natural frekuensi dari gambar soal nomor 2, untuk  $m_1 = m_2 = m$  dan  $l_1 = l_2 = l$ !
5. Tentukan persamaan *natural mode* atau modus perpindahan dari gambar soal nomor 5 untuk  $k_1 = k_2 = k_3 = k$ !
6. Sebuah overhead traveling crane dimodelkan seperti gambar soal nomor 6. Batang memiliki momen inersia ( $I$ )  $0,02 \text{ m}^4$  dan modulus elastisitas ( $E$ )  $2,06 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$ , truk dengan massa ( $m_1$ ) 1000 kg, mengangkat beban dengan massa ( $m_2$ ) 5000 kg, dengan kabel yang memiliki konstanta stiffness  $3 \times 10^5 \text{ N/m}$ . Tentukan *frekuensi natural* dan *mode shape* atau modus getar dari sistem untuk kedua kondisi massa truk! Asumsikan panjang lintasan 40 m.

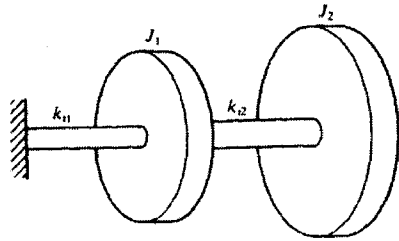


Gambar soal No.5

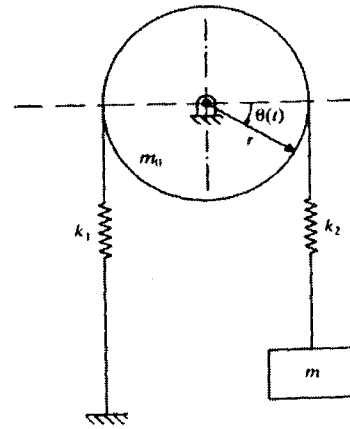


Gambar soal No.6

7. Tentukan persamaan frekuensi natural dan normal mode dari sistem torsional seperti gambar soal nomor 7, untuk  $J_2 = 2J_1$  dan  $k_{t2} = 2k_{t1}$ !

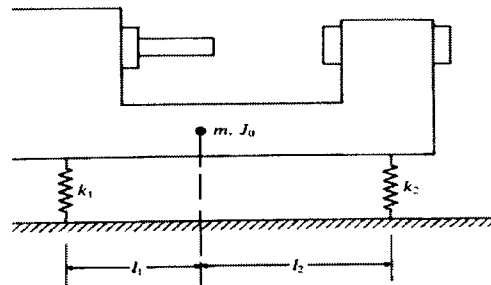


Gambar soal No.7



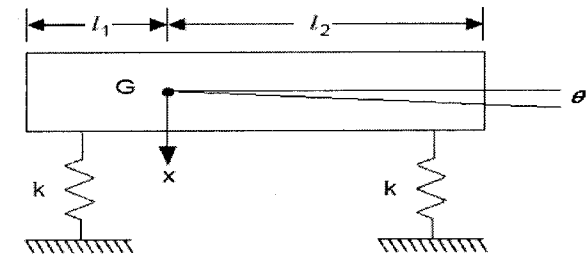
Gambar soal No.8

8. Tentukan persamaan getaran DDOF dan frekuensi natural, dari sistem seperti gambar soal nomor 8! Asumsikan tali yang melintasi silinder tidak slip (parameter lain diasumsikan sendiri alphabetnya).
9. Sebuah mesin bubut dengan massa 1000 kg dan massa momen inersia  $J_0 = 300 \text{ kg m}^2$ , disokong dengan *elastic support* seperti gambar di bawah ini. Jika stiffness dari penyokong  $k_1 = 3000 \text{ N/mm}$   $k_2 = 2000 \text{ N/mm}$ , dan lokasi penyokong pada  $l_1 = 0,5 \text{ m}$  dan  $l_2 = 0,8 \text{ m}$ , tentukan frekuensi natural dan mode shape dari mesin bubut!



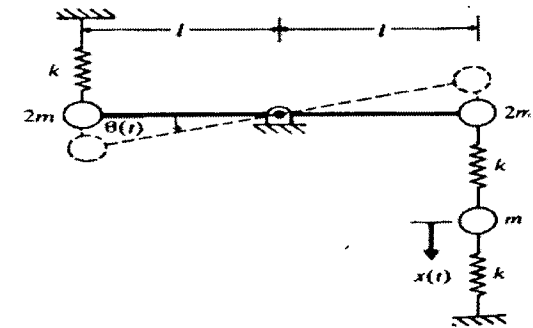
Gambar untuk soal No.9

10. Tentukan persamaan getaran DDOF, mode shape (modus getar), dan natural frekuensi dari gambar di bawah ini untuk  $m_1 = m$  dan  $l_2 = 2l_1$ !

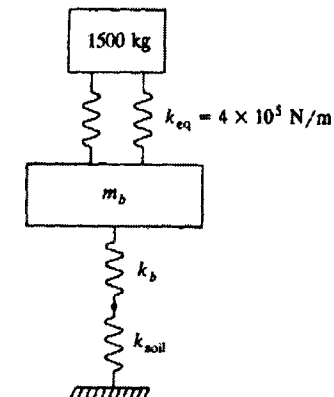


Gambar untuk soal No.10

11. Sebuah batang rigid yang diabaikan massanya diengsel di tengah tengahnya dan akan bergerak ke atas oleh pegas dan massa seperti terlihat pada gambar di bawah ini. Tentukan rumus frekuensi natural dan mode shape dari sistem gambar di bawah ini!

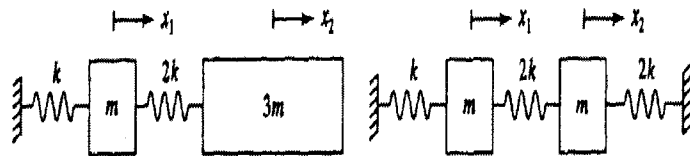


Gambar untuk soal No.11



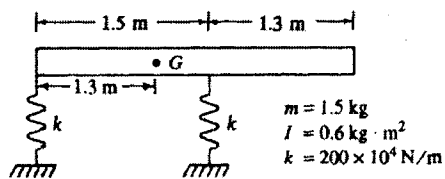
Gambar untuk soal No.12

12. Kompresor dengan massa 1500 kg pada pegas dengan stiffness  $4 \times 10^5$  N/m, ditempatkan di tengah lantai dalam pabrik. Kompresor dengan pegas dimodelkan sebagai batang fixed-fixed dengan panjang 10 m, modulus elastisitas  $200 \times 10^9$  N/m<sup>2</sup>, luas penampang momen inersia  $2,3 \times 10^{-4}$  m<sup>4</sup>, dan massa ( $m_b$ ) 7500 kg. Batang ditanam pada tanah yang memiliki stiffness  $6 \times 10^6$  N/m. Gunakan model 2 derajat kebebasan seperti gambar di samping ini untuk mendapatkan persamaan getaran dan rumus frekuensi natural dari sistem!
- 13-17 Tentukan persamaan getaran dengan metode Newton, persamaan mode shape, dan rumus natural frekuensi dari gambar Soal 13, 14, 15, 16, dan 17!

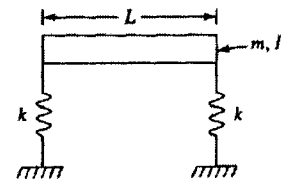


Gambar soal No.13

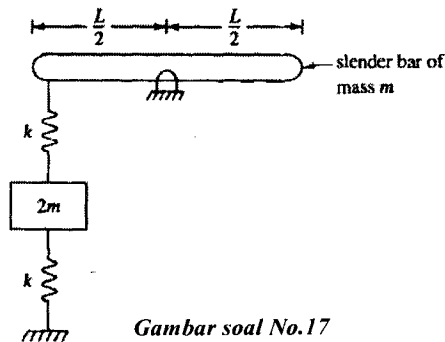
Gambar soal No.14



Gambar soal No.15



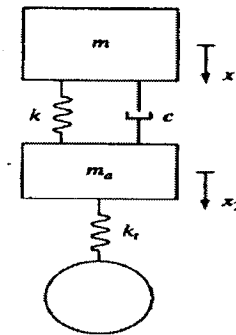
Gambar soal No.16



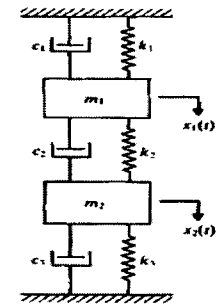
Gambar soal No.17

18. Tentukan displacement untuk solusi total masing-masing massa  $x_1(t)$  dan  $x_2(t)$  seperti pada gambar Soal 13, dengan data:

$(m_1) = 1$  kg,  $(m_2) = 2$  kg,  $k_1 = k_2 = 10.000$  N/m,  $c_1 = 2.000$  N.s/m, dan initial condition  $(x_1(0) = 0,15 \leq \sqrt{b^2 - 4ac} \sqrt{b^2 - 4ac}$  m,  $x_2(0) = 0,1$  m dan  $\dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0$ )

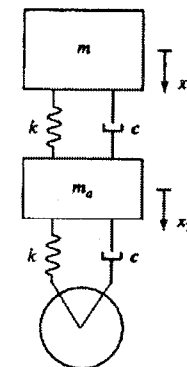


Gambar soal No.18



Gambar soal No.19

19. Tentukan displacement untuk solusi total masing-masing massa dengan  $x_1(t)$  dan  $x_2(t)$  seperti pada gambar Soal 13 dengan data:  $(m_1) = 1$  kg,  $(m_2) = 2$  kg,  $k_1 = k_2 = k_3 = 10.000$  N/m,  $c_1 = c_2 = c_3 = 2.000$  N.s/m, dengan menggunakan initial condition  $x_1(0) = 0,2$  m,  $x_2(0) = 0,1$  m dan  $\dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0$  !



Gambar untuk soal No.20

20. Tentukan displacement untuk  $x_1(t)$  dan  $x_2(t)$  seperti pada gambar Soal 13,  $(m_1) = 1$  kg,  $(m_2) = 2$  kg,  $k_1 = k_2 = k_3 = 10.000$  N/m dan  $c_1 = c_2 = c_3 = 2.000$  N.s/m, dengan menggunakan initial condition  $x_1(0) = 0,2$  m,  $x_2(0) = 0,1$  m dan  $\dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0$  !

# BAB 6

## SISTEM GETARAN MDOF

Kompetensi yang ingin dicapai setelah mempelajari bab ini adalah:

1. Mampu menurunkan persamaan diferensial untuk sistem dengan n-derajat kebebasan (MDOF) menggunakan persamaan Lagrange.
2. Mampu mentransformasi persamaan getaran hasil analisis dengan persamaan Lagrange ke bentuk matriks untuk kasus sistem getaran bebas tak teredam dengan n-derajat kebebasan (MDOF).
3. Mampu mentransformasi persamaan getaran hasil analisis dengan persamaan Lagrange ke bentuk matriks untuk kasus sistem getaran bebas teredam dengan n-derajat kebebasan (MDOF).
4. Mampu mentransformasi persamaan getaran hasil analisis dengan persamaan Lagrange ke bentuk matriks untuk kasus sistem getaran paksa tak teredam atau teredam untuk n-derajat kebebasan (MDOF).

### 6.1 MDOF pada Sistem Pegas-Massa

*Multi Degree of Freedom* (MDOF) merupakan idealisasi sistem getaran lamp mass atau sistem bongkahan massa. Contoh sistem pegas-massa MDOF dinyatakan pada Gambar 6.1 sebagai idealisasi rangkaian gerbong kereta. Prinsip free body diagram dan hukum Newton-3 digunakan untuk  $m_i$ . Persamaan getaran untuk  $m_i$  dapat diturunkan sebagai berikut:

$$m_i \ddot{x}_i - k_i x_{i-1} + (k_i + k_{i+1}) x_i - k_{i+1} x_{i+1} = F_i ; \quad i = 2, 3, \dots, n-1 \quad (6.1)$$

Persamaan diferensial getaran 6.1 dari massa  $m_i$  ini dapat diberlakukan identik dan seterusnya sampai berlaku untuk  $m_n$ . Hal ini dilakukan dengan asumsi setting parameter sebagai:  $i = 1$ ,  $x_0 = 0$  dan  $i = n$ , dan  $x_{n+1} = 0$ ,

diperoleh:

$$m_1 \ddot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2 x_2 = F_1 \quad (6.2)$$

$$m_n \ddot{x}_n + (k_n + k_{n+1})x_n - k_n x_{n-1} = F_n \quad (6.3)$$

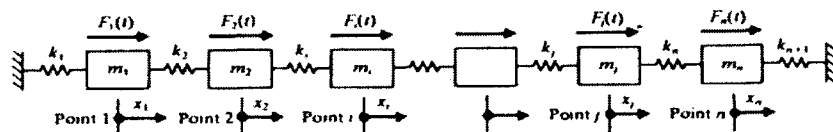
Persamaan 6.1 sampai persamaan 6.3 dinyatakan bentuk matriks, yaitu:

$$[m]\ddot{x} + [k]x = F \quad (6.4)$$

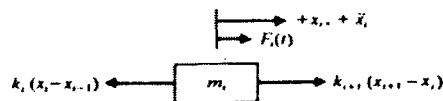
Koefisien dalam matriks  $[m]$  dan  $[k]$  (tidak ada matriks  $[c]$  karena sistem memang tanpa damper) adalah matriks massa dan matriks stiffness dengan koefisien sebagai berikut:

$$[m] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & m_n \end{bmatrix} \quad (6.5)$$

$$[k] = \begin{bmatrix} (k_1 + k_2) & -k_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -k_2 & (k_2 + k_3) & -k_3 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -k_3 & (k_3 + k_4) & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -k_n & (k_n + k_{n+1}) \end{bmatrix} \quad (6.6)$$



(a)



(b)

Gambar 6.1 Sistem pegas-massa MDOF

$x$ ,  $\ddot{x}$  dan  $F$  adalah vektor untuk displacement, percepatan, eksitasi gaya. dan vektor tersebut, dinyatakan sebagai matriks kolom dengan orde baris sesuai jumlah DOF-nya, berikut:

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \quad \ddot{x}(t) = \begin{bmatrix} \ddot{x}_1(t) \\ \ddot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \ddot{x}_n(t) \end{bmatrix}, \quad F(t) = \begin{bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \\ \vdots \\ F_n(t) \end{bmatrix} \quad (6.7)$$

Sistem getaran pegas-massa tanpa damper di atas adalah kasus khusus untuk DOF sampai ke- $n$ , sehingga merupakan sistem dengan  $n$  derajat kebebasan. Dalam bentuk umum, matriks massa dan stiffness dinyatakan sebagai berikut:

$$[m] = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & \dots & m_{1n} \\ m_{12} & m_{22} & m_{23} & \dots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{1n} & m_{2n} & m_{3n} & \dots & m_{nn} \end{bmatrix} \quad (6.8)$$

$$[k] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & \dots & k_{1n} \\ k_{12} & k_{22} & k_{23} & \dots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{1n} & k_{2n} & k_{3n} & \dots & k_{nn} \end{bmatrix} \quad (6.9)$$

## 6.2 Persamaan Lagrange untuk Persamaan Getaran

Pembuatan persamaan diferensial getaran, selain menggunakan prosedur Newton seperti yang dibahas dalam Bab 5, prosedur lain dapat digunakan, yaitu dengan persamaan Lagrange. Persamaan Lagrange ini diturunkan dari selisih energi antara energi potensial dikurangi energi kinetik yang terjadi

selama proses getaran. Pemahaman terhadap metode ini sangat dibutuhkan untuk meng-analisis kasus sistem MDOF. Lagrange dari sistem dinamik dengan notasi '  $L$  ', definisi untuk energi kinetik '  $V$  ', dan energi potensial dengan '  $T$  ' dari sistem, adalah sebagai berikut:

$$L = T - V \quad (6.10)$$

Fungsi transformasi seperti halnya dengan Laplace, Fungsi Lagrange juga mempunyai turunan fungsi. Fungsi turunan ini dapat disamakan dengan fungsi asalnya, yaitu *sama dengan nol*. Dengan istilah lain, dari koordinat umum persamaan 6.10 dan fungsi turunannya terhadap waktu adalah sama. Setiap DOF memberikan fungsi Lagrange dengan 2(dua) variabel independen, yaitu *displacement* dan *waktu*. Jika terdapat n-DOF MDOF, maka terdapat 2n-variabel. Turunan terhadap waktu dari koordinat umum, dipandang sebagai variabel independen dari sejumlah koordinat umum. Sistem operasional dilakukan secara konservatif, yaitu *operasi dot produk* dari vektor sesuai Lagrange. Metode Lagrange merupakan metode dasar dan diambil sebagai *displacement virtual vector*, dan metode ini didefinisikan oleh satu koordinat umum, yaitu:

$$L = L(x_1, x_2, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_n) \quad (6.11)$$

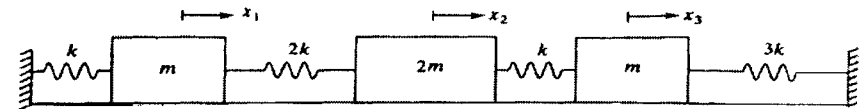
Hasil dari persamaan energi dapat dimanipulasi untuk memberikan turunan dari persamaan 6.11. Turunan persamaan Lagrange dinyatakan sebagai berikut:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (6.12)$$

Persamaan 6.12 diaplikasikan untuk menurunkan n persamaan diferensial getaran untuk sistem dengan n-derajat kebebasan. Persamaan Lagrange digunakan untuk menurunkan persamaan diferensial getaran dari sistem getaran linier maupun untuk sistem getaran non-linier.

### Contoh 6.1

Gunakan persamaan Lagrange untuk menurunkan persamaan gerak dari sistem Gambar 6.2. '  $x_1$ ,  $x_2$ , dan  $x_3$  ' digunakan sebagai koordinat umum.



Gambar 6.2 Sistem pegas-massa untuk Soal 6.1

**Jawab:**

Energi kinetik sistem yang sesuai dengan Gambar 6.2 adalah:

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} 2m \dot{x}_2^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}_3^2$$

Energi potensial sistem menjadi seperti berikut:

$$V = \frac{1}{2} k x_1^2 + \frac{1}{2} 2k (x_2 - x_1)^2 + \frac{1}{2} k (x_3 - x_2)^2 + \frac{1}{2} 3k x_3^2$$

Fungsi Lagrange dinyatakan dari dua persamaan sebelumnya, diperoleh:

$$L = T - V = \frac{1}{2} \left[ m \dot{x}_1^2 + 2m \dot{x}_2^2 + m \dot{x}_3^2 - k x_1^2 - 2k (x_2 - x_1)^2 - k (x_3 - x_2)^2 - 3k x_3^2 \right]$$

Aplikasikan persamaan Lagrange untuk membuat persamaan diferensial getaran adalah sebagai berikut:

1. Untuk massa pertama:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_1} &= 0 \\ \frac{d}{dt} (m \dot{x}_1) - [-k x_1 - 2k (x_2 - x_1)(-1)] &= 0 \\ m \ddot{x}_1 + 3k x_1 - 2k x_2 &= 0 \end{aligned}$$

2. Untuk massa kedua:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_2} = 0$$



$$\frac{d}{dt} \left( 2m \dot{x}_2 \right) - \left[ -2k(x_2 - x_1) - k(x_3 - x_2)(-1) \right] = 0$$

$$2m \ddot{x}_2 - 2kx_1 + 3kx_2 - kx_3 = 0$$

3. Untuk massa ketiga:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_3} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_3} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left( m \dot{x}_3 \right) - \left[ -k(x_3 - x_2) - 3kx_3 \right] = 0$$

$$m \ddot{x}_3 - kx_2 + 4kx_3 = 0$$

Jadi persamaan gerak dari sistem yang sesuai dengan Gambar 6.2 adalah:

$$m \ddot{x}_1 + 3kx_1 - 2kx_2 = 0$$

$$2m \ddot{x}_1 - 2kx_1 + 3kx_2 - kx_3 = 0$$

$$m \ddot{x}_3 - kx_2 + 4kx_3 = 0$$

Hasil persamaan getaran pada contoh di atas masih belum menggunakan eksitasi sebagai gaya luar. Kontribusi eksitasi gaya dinyatakan sebagai berikut:

1. Sistem terdiri dari n-DOF atau derajat kebebasan, dan sistem didefinisikan dengan koordinat umum bernotasi '  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  '.
2. Gaya eksternal non-konservatif atau gaya berbentuk umum. Gaya umum ini adalah eksitasi gaya perlawanan terhadap gerakan DOF yang timbul akibat pemasangan sistem damper.
3. Sistem mengalami displacement kecil dengan posisi baru, yaitu  $x_1 + \delta x_1, x_2 + \delta x_2, \dots, x_n + \delta x_n$ . Perubahan displacement ini disebut dengan virtual displacement.
4. Kerja semu karena kita asumsikan akibat aksi gaya eksitasi pada kondisi ini disebut virtual work.

Kerja semu dirumuskan sebagai berikut:

$$\delta W = \sum_{i=1}^n Q_i \delta x_i \quad (6.13)$$

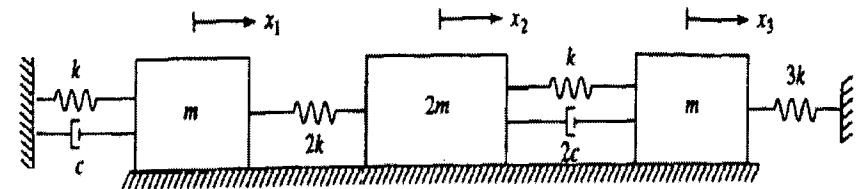
'  $Q_i$  ' disebut dengan gaya umum. Persamaan Lagrange untuk sistem non-konservatif ini menjadi:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = Q_i \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (6.14)$$

Yang penting untuk pembuatan persamaan getaran dengan persamaan Lagrange adalah deskripsi atau pernyataan energi kinetik (untuk massa-kecepatan dan redaman-kecepatan) dan energi potensial (untuk kekakuan-displacement). Pernyataan energi ini harus dilakukan dengan runtut, lengkap, dan benar. Contoh 6.1 masih menggunakan koneksi antar semua massa dengan pegas. Contoh berikut ini masih dengan jumlah DOF yang sama, tetapi menyertakan kombinasi pegas dan damper pada posisi tertentu, seperti pada Gambar 6.3. Perbedaan dan persamaan dari persamaan getaran contoh 6.1, contoh 6.2, dan contoh 6.3 dapat menjadi perhatian kita, berikut ini.

### Contoh 6.2

Gunakan persamaan Lagrange untuk menurunkan persamaan gerak dari sistem di bawah ini dengan  $x_1, x_2$ , dan  $x_3$ , sebagai koordinat umum.



Gambar 6.3 Sistem pegas-massa-redaman untuk Soal 6.2

**Jawab:**

Prinsip persamaan Lagrange adalah *metode virtual work* atau metode kerja semu. Displacement semu sesuai Gambar 6.3, didefinisikan sebagai

$\delta x_1, \delta x_2$  dan  $\delta x_3$ . Penyertaan konstanta damper menimbulkan kerja kinetik, tetapi arah kerja ini berlawanan dengan arah kerja gaya yang dibangun dalam viscous damper. Gaya damper tersebut adalah  $\dot{c}x_1$ . Kerja semu dari damping pertama dari kiri pada sistem menjadi  $-c\dot{x}_1\delta x_1$ . Damping selanjutnya adalah  $2c(\dot{x}_3 - \dot{x}_2)$ . Kerja semu menjadi  $2c(\dot{x}_3 - \dot{x}_2)\delta x_3$ . Karena gaya yang berkerja dari damping kanan berlawanan arah dengan arah perpindahan  $\delta x_3$  maka kerja semu pada titik ini adalah  $-2c(\dot{x}_3 - \dot{x}_2)\delta x_3$ . Kerja semu totalnya menjadi:

$$\delta W = -c\dot{x}_1\delta x_1 + 2c(\dot{x}_3 - \dot{x}_2)\delta x_2 - 2c(\dot{x}_3 - \dot{x}_2)\delta x_3$$

Gaya umum yang berkerja akibat pemasangan koefisien damping dinyatakan sebagai berikut:

$$Q_1 = -c\dot{x}_1, \quad Q_2 = 2c(\dot{x}_3 - \dot{x}_2) \text{ dan } Q_3 = -2c(\dot{x}_3 - \dot{x}_2)$$

Langkah selanjutnya dilakukan dengan mengikuti langkah contoh Soal 6.1. Persamaan getaran dengan penyertaan damping sesuai Gambar 6.3 diperoleh sebagai berikut:

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 + 3kx_1 - 2kx_2 &= -c\dot{x}_1 \\ 2m\ddot{x}_1 - 2kx_1 + 3kx_2 - kx_3 &= 2c(\dot{x}_3 - \dot{x}_2) \\ m\ddot{x}_3 - kx_2 + 4kx_3 &= -2c(\dot{x}_3 - \dot{x}_2) \end{aligned}$$

Formulasi matriks umum sistem dengan n-DOF mempunyai koordinat sebagai gerakan bebas sebanyak-n. *Sistem linier* ini dinyatakan dalam bentuk energi kinetik dan potensial dengan kedua persamaan energi ini menjadi *kuadratik*. Sistem linear yang dimaksud adalah harga  $V$  dan  $T$  dari persamaan dengan konstanta ' $k$ ' dan ' $m$ ' yang konstan. Dalam hukum Hooke, perilaku material dari kurva uji tarik (terutama material non-logam dan non-kayu)

mendapat harga ' $k$ ' yang tidak konstan. Harga ini merupakan fungsi dari besar defleksi yang diterima. Getaran memiliki domain waktu skala relativitas atau kondisi tertentu yang menyebabkan terjadinya *peluruhan massa* sehingga sistem tersebut tidak linear. Persamaan 6.15 menyatakan bentuk kuadratik untuk perpindahan atau displacement, sesuai rumus energi potensial pegas sebagai  $\frac{1}{2}kx^2$ , dan persamaan 6.16 menyatakan energi kinetik gerak benda dengan  $\frac{1}{2}mv^2$  sebagai berikut:

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n k_{ij} x_i x_j \quad (6.15)$$

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} \dot{x}_i \dot{x}_j \quad (6.16)$$

Persamaan Lagrange untuk sistem linier ini menjadi:

$$L = \frac{1}{2} \left[ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left( m_{ij} \dot{x}_i \dot{x}_j - k_{ij} x_i x_j \right) \right]$$

Persamaan 6.14 dinyatakan kembali sebagai berikut:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = Q_i \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (6.14)$$

Eksitasi gaya dalam bentuk umum untuk setiap benda dari persamaan MDOF, dinyatakan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} Q_i &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left\{ m_{ij} \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} \left( \dot{x}_i \dot{x}_j \right) \right] + k_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( x_i x_j \right) \right\} \\ Q_i &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left\{ m_{ij} \frac{d}{dt} \left[ x_i \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial \dot{x}_i} + x_j \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{x}_i} \right] + k_{ij} \left( x_i \frac{\partial x_j}{\partial x_i} + x_j \frac{\partial x_i}{\partial x_i} \right) \right\} \end{aligned} \quad (6.17)$$

Persamaan pertama dari persamaan 6.17 merupakan rumus umum penerapan persamaan 6.14. Persamaan ke-2 dari persamaan 6.17 merupakan penjabaran lain untuk menyatakan eksitasi gaya dengan pendekatan numerik. Pendekatan numerik dilakukan untuk solusi eksak tidak memungkinkan atau lama pengerjaannya. Hal ini akibat pendekatan sebagai berikut:

$$\frac{\partial x_i}{\partial x_l} = \delta_{il} = \begin{cases} 0 & i \neq l \\ 1 & i = l \end{cases}$$

Persamaan untuk '  $Q_l$  ' menjadi:

$$Q_l = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left\{ m_{ij} \frac{d}{dt} \left[ \dot{x}_i \delta_{jl} + \dot{x}_j \delta_{il} \right] + k_{ij} \left( x_i \delta_{jl} + x_j \delta_{il} \right) \right\}$$

Ruas sebelah kanan tanda '=' dinyatakan dalam 4 (empat) suku sesuai keberlakuan indeks  $i$  dan  $l$ , sehingga persamaan di atas menjadi:

$$Q_l = \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^n m_{il} \ddot{x}_i + \sum_{j=1}^n m_{lj} \ddot{x}_j + \sum_{i=1}^n k_{il} x_i + \sum_{j=1}^n k_{jl} x_j \right)$$

Indeks penjumlahan persamaan di atas berubah sehingga kombinasi penjumlahannya akan menghasilkan seperti berikut ini:

$$Q_l = \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^n (m_{il} + m_{li}) \ddot{x}_i + \sum_{i=1}^n (k_{il} + k_{li}) x_i \right) \quad (6.18)$$

Setelah persamaan Lagrange dibuat maka perlu dicek komposisi persamaan ini, apakah masih mengikuti pola persamaan getaran pada umumnya. Perlu dicermati, atau sebagai catatan pada persamaan 6.15 dengan  $k_{il}$  dan  $k_{li}$ , keduanya adalah perkalian *vektor dot* dari produk ' $x_i \cdot x_j$ '. Persamaan 6.18 berlaku untuk kondisi  $m_{il} = m_{li}$ . Persamaan 6.18 menjadi:

$$Q_l = \sum_{i=1}^n m_{li} \ddot{x}_i + \sum_{i=1}^n k_{li} x_i \quad l = 1, 2, \dots, n \quad (6.19)$$

Persamaan 6.19 merepresentasikan sistem  $n$  persamaan diferensial linear tanpa redaman, atau dengan sederhana sebagai:

$$M \ddot{x} + Kx = F \quad (6.20)$$

' $M$ ' adalah matriks massa dengan orde  $n \times n$ , dan ' $K$ ' adalah matriks stiffness dengan orde  $n \times n$ . ' $F$ ' adalah matriks kolom vektor eksitasi gaya dengan orde  $n \times 1$ , dan ' $x$ ' adalah matriks kolom vektor displacement orde  $n \times 1$ . ' $\ddot{x}$ ' adalah matriks kolom vektor percepatan dengan orde  $n \times 1$ .

### 6.3 Getaran Bebas Sistem MDOF

Untuk getaran bebas sistem linier  $n$  derajat kebebasan, maka persamaan umum getaran adalah sebagai berikut:

$$M \ddot{x} + C \dot{x} + Kx = 0 \quad (6.21)$$

Kita ulang kembali sebagai introduksi, yaitu kondisi getaran bebas dengan asumsi tanpa eksitasi gaya dan tanpa redaman. Dengan memasukkan harga  $C = 0$  dan tanpa eksitasi gaya, persamaan 6.21 diasumsikan sebagai solusi displacement dengan sederet fungsi eksponensial, yaitu:

$$x = X e^{i\omega t} \quad (6.22)$$

Dengan harga  $C = 0$  dan  $F = 0$ , solusi modulus getar atau *mode shape* vektor  $X$  dan frekuensi natural  $\omega$  sebagai matriks eigenvalue dan eigenvektornya dinyatakan dengan persamaan karakteristik frekuensi sebagai berikut:

$$M^{-1} K X = \omega^2 X \quad (6.23)$$

Frekuensi natural diperoleh dari akar kuadrat dari eigenvalue dengan setting persamaan  $M^{-1} K$  sebagai berikut:

$$\det |M^{-1} K - \omega^2 I| = 0 \quad (6.24)$$

atau,

$$\det |K - \omega^2 M| = 0 \quad (6.25)$$

Matriks  $I$  pada persamaan 6.24 merupakan matriks identitas orde  $n \times n$ . Jika matriks  $K$  bersifat non-singular, maka invers matriks tersebut menggunakan matriks fleksibilitas  $A$ , dengan  $A = K^{-1}$ . Persamaan 6.25 berubah menjadi:

$$\det |\omega^2 A M - I| = 0 \quad (6.26)$$

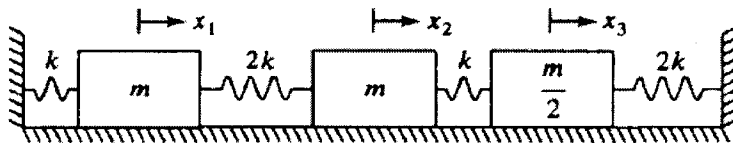
Kondisi riil untuk sistem getaran normal menunjukkan bahwa harga semua eigenvalue dari hubungan  $M^{-1} K$  yang berhubungan dengan bentuk simetri dari matriks massa dan matriks stiffness tidak negatif. Dengan kata lain, frekuensi pribadi harus diperoleh positif, sehingga kemudian ada  $n$

frekuensi natural dengan  $\omega_1 \leq \omega_2 \leq \dots \leq \omega_n$ . Frekuensi ini berhubungan dengan harga masing-masing eigenvalue  $\omega_i^2$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  dan memiliki eigenvektor non-trivial  $X_i$ . Persamaan tersebut adalah sebagai berikut:

$$M^{-1} K X_i = \omega_i^2 X_i \quad (6.27)$$

### Contoh 6.3

Cari persamaan untuk frekuensi natural dan modus getaran atau mode shapes untuk sistem tiga derajat kebebasan seperti yang terlihat pada Gambar 6.4.



Gambar 6.4 Sistem pegas-massa Soal 6.3

### Jawab:

Solusi persamaan diferensial getaran dapat diperoleh dengan cara Newton ataupun dengan cara menyatakan persamaan Lagrange yang untuk getaran bebas akan menghasilkan persamaan yang sama. Dalam bentuk matriks, persamaan getaran tiga-DOF dinyatakan sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3k & -2k & 0 \\ -2k & 3k & -k \\ 0 & -k & 3k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Penerapan persamaan 6.24 pada persamaan di atas memberikan persamaan berikut:

$$\det \begin{bmatrix} 3\phi - \lambda & -2\phi & 0 \\ -2\phi & 3\phi - \lambda & -\phi \\ 0 & -2\phi & 6\phi - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

di mana  $\phi = \frac{k}{m}$ .

Matriks determinan memberikan persamaan simultan dengan pangkat tertinggi dari polinomial sesuai jumlah baris atau kolom matriks. Dalam uraian ini kita nyatakan polinomial dalam karakter yang tidak diketahui sebagai  $\beta$ . Ekspansi dari determinan menghasilkan persamaan karakteristik dalam karakter  $\beta$  sebagai:

$$\beta^3 + 12\beta^2 - 39\beta + 24 = 0 \text{ dengan } \beta = \lambda/\phi$$

Akar dari persamaan karakteristik dalam parameter ' $\beta$ ' menjadi:

$$\beta_1 = 0,798, \beta_2 = 4,455, \text{ dan } \beta_3 = 6,747$$

Sehingga dari tiga frekuensi natural kasus ini diperoleh:

$$\omega_1 = 0,893 \sqrt{\frac{k}{m}}, \omega_2 = 2,110 \sqrt{\frac{k}{m}}, \text{ dan } \omega_3 = 2,597 \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (\text{jawab})$$

Mode shape atau modus getar diperoleh dengan mencari solusi non-trivial dari persamaan berikut ini:

$$\begin{bmatrix} 3\phi - \lambda_i & -2\phi & 0 \\ -2\phi & 3\phi - \lambda_i & -\phi \\ 0 & -2\phi & 6\phi - \lambda_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{i1} \\ X_{i2} \\ X_{i3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Persamaan matriks ini diuraikan menjadi tiga persamaan simultan umum tanpa bentuk matriks. Umumnya dipilih salah satu vektor koefisien matriks  $X$  yang sama dengan satu sehingga vektor modus getar untuk yang lain diperoleh. Persamaan pertama untuk  $X_{i1}$  menjadi:

$$X_{i1} = \frac{2\phi}{3\phi - \lambda_i} X_{i2}$$

Persamaan ketiga diperoleh:

$$X_{i3} = \frac{2\phi}{6\phi - \lambda_i} X_{i2}$$

Dengan memilih harga  $X_{i2} = 1$  maka diperoleh vektor mode shape:

$$X_1 = \begin{bmatrix} 0,908 \\ 1 \\ 0,384 \end{bmatrix}, \quad X_2 = \begin{bmatrix} -1,375 \\ 1 \\ 1,294 \end{bmatrix}, \quad X_3 = \begin{bmatrix} -0,534 \\ 1 \\ -2,677 \end{bmatrix} \quad (\text{jawab})$$

Solusi persamaan untuk problem homogen MDOF umumnya dinyatakan dalam bentuk eksponensial, misalnya sebagai berikut:

$$x(t) = \sum X_i (C_{i1} e^{i\omega t} + C_{i2} e^{-i\omega t}) \quad (6.28)$$

Solusi persamaan 6.28 ini mengandung bilangan kompleks. Pendekatan deret dari identitas Euler digunakan untuk mengganti bilangan kompleks dengan fungsi trigonometri, sehingga jawab getaran bebas MDOF dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$x(t) = \sum X_i (C_{i1} \cos \omega_i t + C_{i2} \sin \omega_i t) \quad (6.29)$$

Persamaan 6.29 dapat dinyatakan dengan cara lain, yaitu dengan manipulasi matematik dari identitas trigonometri, sehingga diperoleh:

$$x(t) = \sum_{i=1}^n X_i A_i \sin(\omega_i t - \phi_i) \quad (6.30)$$

Untuk mendapatkan sejumlah harga koefisien C diperlukan sejumlah *initial condition* yang harus spesifik sebagai variabel independen. Umumnya initial condition atau kondisi awal diperoleh dari pengamatan percobaan atau dari data uji riil. Berikut ini contoh dua matriks kolom initial condition:

$$x(0) = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ \vdots \\ x_n(0) \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad \dot{x}(0) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(0) \\ \dot{x}_2(0) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(0) \end{bmatrix}$$

Penyertaan kondisi awal  $2n$  dalam persamaan 6.30 menghasilkan  $2n$  persamaan simultan berikut:

$$x(0) = -\sum_{i=1}^n X_i A_i \sin \phi_i \quad (6.31)$$

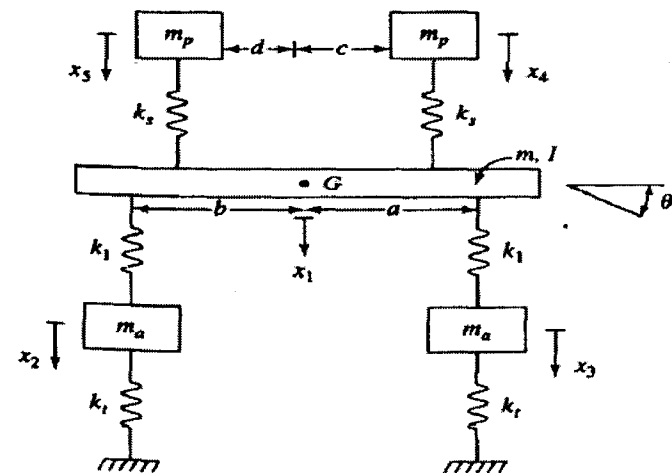
$$\dot{x}(0) = \sum_{i=1}^n X_i \omega_i A_i \cos \phi_i \quad (6.32)$$

#### Contoh 6.4

Tentukan persamaan getaran MDOF tanpa redaman dari Gambar 6.5, dengan sebuah model 6 (enam) DOF. ' $k_t$ ' sebagai idealisasi kekakuan pegas sifat roda dari jalan ke axle. ' $k_l$ ' merupakan idealisasi kekakuan pegas dari axle ke chassis-body kendaraan. ' $k_s$ ' adalah idealisasi stiffness dari tempat duduk dengan penumpang (diasumsikan mereka menggunakan sabuk pengaman).

**Jawab:**

Koordinat umum mengikuti Gambar 6.5 sebagai *displacement vector*, didefinisikan dengan  $x = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5 \ \theta]$ .



Gambar 6.5 Model suspensi otomotif untuk Soal 6.4

Persamaan getaran MDOF tanpa redaman dan gaya eksitasi dalam bentuk matriks ditulis:

$$[M] \{d^2 X/dt^2\} + [k] \{X\} = 0$$

Penyelesaian persamaan ini untuk menyatakan persamaan getaran dapat dilakukan dengan metode Newton atau persamaan Lagrange, diperoleh matriks  $M$  menjadi:

$$M = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Koefisien yang digunakan untuk menentukan matriks stiffness adalah:

$$K = \begin{bmatrix} 2k_1 + 2k_2 & -k_1 & -k_1 & -k_2 & -k_2 & k_1(a-b) + k_2(c-d) \\ -k_1 & k_1 + k_2 & 0 & 0 & 0 & -k_1 a \\ -k_1 & 0 & k_1 + k_2 & 0 & 0 & k_1 b \\ -k_2 & 0 & 0 & k_2 & 0 & k_2 c \\ -k_2 & 0 & 0 & 0 & k_2 & -k_2 d \\ k_1(b-a) + k_2(d-c) & -k_1 a & k_1 b & k_2 c & -k_2 d & k_1(a^2 + b^2) + k_2(c^2 + d^2) \end{bmatrix}$$

Persamaan diferensial untuk getaran bebas MDOF dengan redaman viscous seperti persamaan sebelumnya adalah:

$$M \ddot{x} + C \dot{x} + Kx = 0$$

Jika matriks redaman  $C$  adalah kombinasi linier dari matriks massa notasi  $M$  dan matriks stiffness  $K$ , maka sistem adalah redaman proporsional. Pada kasus ini prinsip koordinat dari sistem tak teredam digunakan untuk uncouple persamaan diferensial. Jika matriks redaman berubah-ubah, maka prinsip koordinat dari sistem tak teredam tidak boleh uncouple atau decouple seperti persamaan ini. Prosedur umum harus digunakan untuk persamaan di atas dengan  $2n$ -persamaan diferensial dalam bentuk *first order uncouple* atau SDOF uncouple dengan koordinat setelah mengalami transformasi sebagai berikut:

$$\tilde{M} \ddot{y} + \tilde{K} y = 0 \quad (6.33)$$

## 6.4 Getaran Paksa Sistem MDOF

Persamaan diferensial umum untuk getaran paksa untuk sistem MDOF dengan redaman viscous dan eksitasi adalah:

$$M \ddot{x} + C \dot{x} + Kx = F(t) \quad (6.34)$$

Persamaan getaran ini mempunyai koefisien sesuai kasus idealisasi model. Metode Newton atau persamaan Lagrangian, yang berdasar metode energi, keduanya dapat digunakan untuk mendapatkan persamaan getaran diferensial ini. Untuk permasalahan eksitasi harmonik pada sistem getaran paksa MDOF tak teredam, persamaan 6.34 berubah menjadi:

$$M \ddot{x} + Kx = F \sin \omega t \quad (6.35)$$

' $F$ ' adalah  $n$ -dimensional vektor dari setiap konstanta amplitudo gaya eksitasi. Pilihan eksitasi gaya antara lain adalah dengan fungsi sinus, maka solusi total untuk setiap DOF diasumsikan dengan bentuk sebagai berikut:

$$x(t) = U \sin \omega t \quad (6.36)$$

' $U$ ' adalah  $n$ -dimensional vektor dari koefisien *under estimate* atau koefisien yang harus diperoleh, dan  $U$  mempunyai dimensi kecepatan. Substitusikan persamaan 6.46 ke persamaan 6.35 sehingga diperoleh:

$$(-\omega^2 M + K)U = F \quad (6.37)$$

Persamaan 6.37 ini adalah representasi sejumlah  $n$  persamaan aljabar simultan untuk mendapatkan komponen vektor  $U$ , yaitu dengan rumus sebagai berikut:

$$|-\omega^2 M - K| = 0 \quad (6.38)$$

Persamaan 6.38 memungkinkan untuk terjadi ketika frekuensi eksitasi gaya menjadi *coincide* atau bersesuaian dengan salah satu dari frekuensi natural sistem. Akibatnya, penggunaan persamaan 6.36 tidak tepat, karena respons displacement meningkat secara linier tajam seiring pertambahan waktu. Kondisi ini menghasilkan resonansi.

Apabila solusi dari persamaan 6.37 ada maka persamaan untuk perpindahan ' $U$ ' dapat dinyatakan dalam bentuk lain sebagai berikut:

$$U = F^{-1} (-\omega^2 M + K) \quad (6.39)$$

Persamaan diferensial sistem  $n$ -DOF dengan viscous damping yang mendapat eksitasi harmonik dinyatakan dalam bentuk umum menjadi:

$$M \ddot{x} + C \dot{x} + Kx = \text{Im}(Fe^{i\omega t}) \quad (6.40)$$

$F$  merupakan  $n$ -vektor eksitasi gaya sebagai konstanta. Konstanta dapat berupa bilangan kompleks jika masing-masing gaya eksitasi umum tidak satu phase. Persamaan eksitasi gaya tak sephase adalah sebagai berikut:

$$F_i = f_i e^{i\phi} \quad (6.41)$$

Solusi 6.40 diasumsikan sebagai berikut:

$$x(t) = \text{Im}(Ue^{i\omega t}) \quad (6.42)$$

' $U$ ' adalah  $n$ -dimensional vektor konstanta kompleks. Substitusikan persamaan 6.42 ke persamaan 6.49 sehingga menghasilkan:

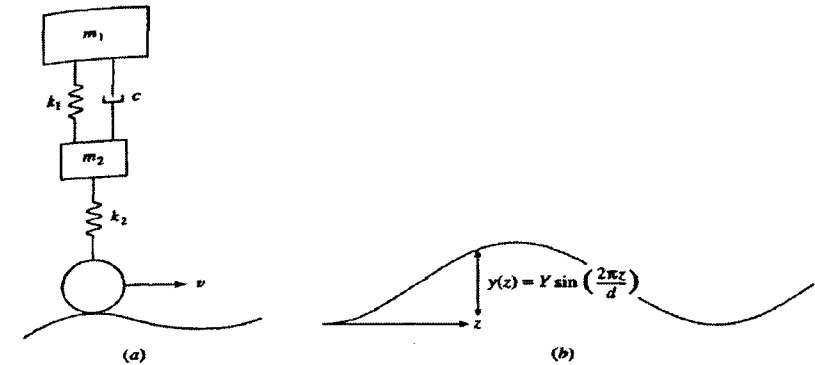
$$(-\omega^2 M + i\omega C + K)U = F \quad (6.43)$$

Persamaan 6.43 menghasilkan:

$$U = F(-\omega^2 M + i\omega C + K)^{-1}$$

#### Contoh 6.5

Model 2 derajat kebebasan dari sistem suspensi otomotif. Kendaraan berjalan di permukaan jalan mendekati kontur sinusoidal Gambar 6.6b. Kecepatan kendaraan adalah  $U$ . Tentukan persamaan getaran dan respons kendaraan dalam term parameter sistem.



Gambar 6.6 Sket dari Contoh 6.5

**Jawab:**

Persamaan getaran dari cara Newton atau persamaan Lagrange adalah:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c & -c \\ -c & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 + k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ k_2 Y \end{bmatrix} \sin \omega t$$

Kecepatan kendaraan berhubungan dengan DOF otomotif, dengan koordinat- $y$ . Solusi penyelesaian harga kecepatan dari persamaan 6.39 untuk persamaan getaran ini, dinyatakan sebagai:

$$U_1 = \frac{k_2 Y (k_1 + i\omega C)}{(\omega^4 m_1 m_2 - \omega^2 m_1 k_1 - \omega^2 m_1 k_2 - \omega^2 k_1 m_2 + k_1 k_2) + i(-\omega^3 m_1 c - \omega^3 m_2 c + \omega c k_2)}$$

Harga kecepatan  $U_1$  ini merupakan DOF untuk otomotif. Kecepatan tersebut adalah  $U_1$  dan kecepatan diletakkan pada tempat yang tepat dengan menyatakan sebagai bilangan kompleks *conjugate* dari pembilang persamaan di atas, yaitu:

$$U_1 = \text{Re}(U_1) + i \text{Im}(U_1)$$

Bentuk polar dari  $U_1$  adalah:

$$U_1 = |U_1| e^{i\phi_1}$$

$$|U_1| = \sqrt{\text{Re}(U_1)^2 + \text{Im}(U_1)^2}$$

Dengan persamaan beda fase diperoleh:

$$\phi_I = -\tan^{-1} \left( \frac{\text{Im}(U_I)}{\text{Re}(U_I)} \right)$$

Manipulasi aljabar memberikan persamaan lain untuk mutlak  $U_I$  sebagai:

$$|U_I| = \sqrt{\frac{k_I^2 + (\omega c)^2}{(\text{Re}(D))^2 + \text{Im}(D)^2}} \text{ dan}$$

$$\phi = -\tan^{-1} \left( \frac{-k_I \text{Im}(D) + \omega c \text{Re}(D)}{\omega c \text{Im}(D) + k_I \text{Re}(D)} \right)$$

sehingga diperoleh:

$$\text{Re}(D) = \omega^4 m_1 m_2 - \omega^2 m_1 k_1 - \omega^2 m_1 k_2 - \omega^2 k_1 m_2 + k_1 k_2$$

$$\text{Im}(D) = -\omega^3 m_1 c - \omega^3 m_2 c + \omega c k_2$$

Solusi dari  $x_1(t)$  sebagai respons keadaan menjadi:

$$x_1(t) = \text{Im}(U_I e^{i\omega t}) = \text{Im}(|U_I| e^{i(\omega t - \phi_I)}) = |U_I| \sin(\omega t - \phi_I)$$

## 6.5 Ringkasan

Pembahasan sistem getaran dengan  $n$  derajat kebebasan atau MDOF diawali dengan analisis penurunan persamaan diferensial dengan menggunakan persamaan Lagrange. Persamaan aljabar linier simultan hasil dari penurunan dengan persamaan Lagrange ditransformasikan dalam bentuk matriks dengan koordinat transformasi untuk diselesaikan solusinya. Untuk kasus sistem getaran bebas dengan  $n$  derajat kebebasan, solusinya menggunakan mode normal dan atau mode shape.

## 6.6 Pernyataan untuk Pemahaman

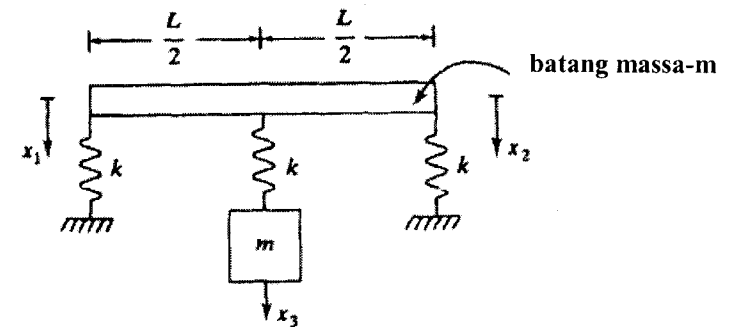
Nyatakan pengertian berikut ini sehingga jelas bedanya.

- Solusi linear dan non-linear
- Solusi integral konvolusi integral harmonik
- Virtual work dan virtual displacement

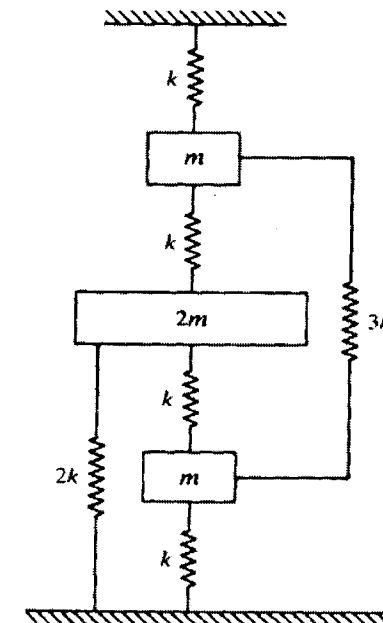
## 6.7 Soal

Untuk soal nomor-1 sampai nomor-2 dapat dilakukan penurunan terhadap persamaan MDOF dengan metode Newton.

- Gunakan persamaan Lagrange untuk menurunkan persamaan getaran dari gambar berikut:

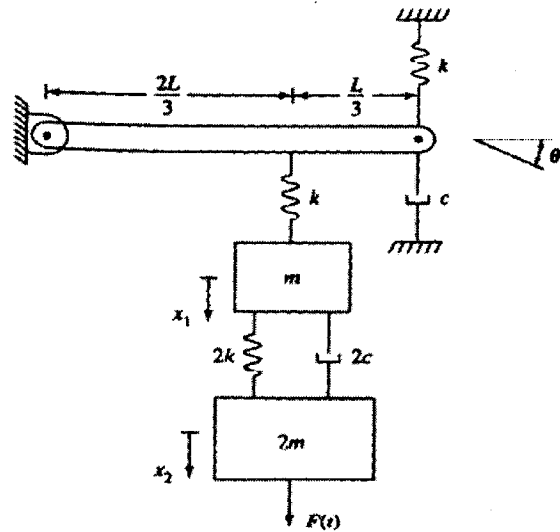


- Gunakan persamaan Lagrange untuk menurunkan persamaan getaran dari gambar berikut:

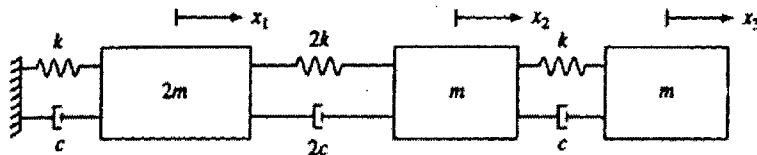




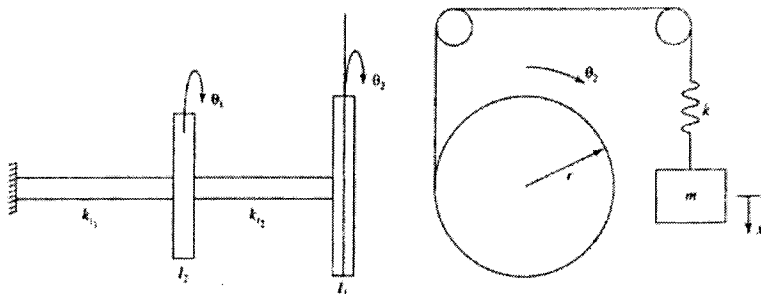
3. Gunakan persamaan Lagrange untuk menurunkan persamaan getaran dari gambar berikut:



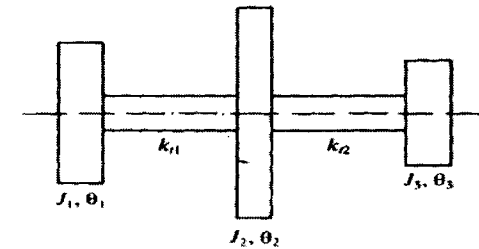
4. Gunakan persamaan Lagrange untuk menurunkan persamaan getaran dari gambar berikut:



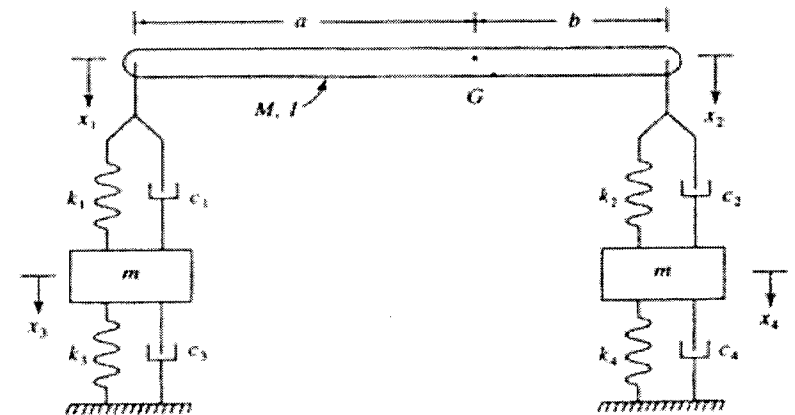
5. Gunakan persamaan Lagrange untuk menurunkan persamaan getaran dari gambar berikut:



6. Turunkan persamaan getaran dari gambar di bawah ini dengan  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  dan  $x$  sebagai koordinat DOF!
7. Buatlah matriks persamaan getaran torsi dari gambar di samping ini!

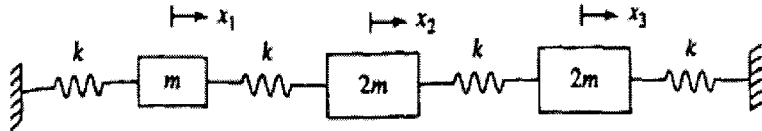


8. Turunkan persamaan getaran dari gambar di bawah ini dengan  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  dan  $x_4$  sebagai koordinat umum!

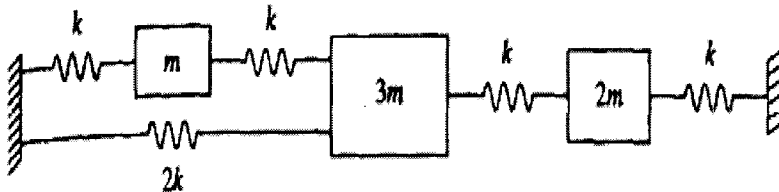


9. Buat persamaan getaran dalam bentuk matriks dari gambar Soal 2!
10. Buat persamaan getaran dalam bentuk matriks dari gambar Soal 3!
11. Buat persamaan getaran dalam bentuk matriks dari gambar Soal 4!
12. Buat persamaan getaran dalam bentuk matriks dari gambar Soal 5!
13. Buat persamaan getaran dalam bentuk matriks dari gambar Soal 6!
14. Buat persamaan getaran dalam bentuk matriks dari gambar Soal 8!

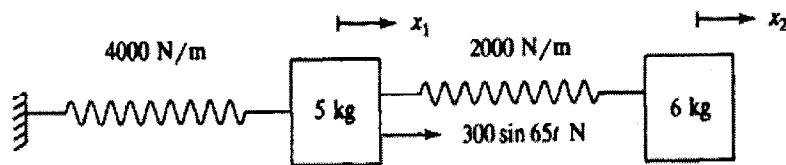
15. Tentukan persamaan frekuensi natural dan persamaan untuk mode shapes, sistem getaran bebas 3 (tiga) derajat kebebasan berikut ini:



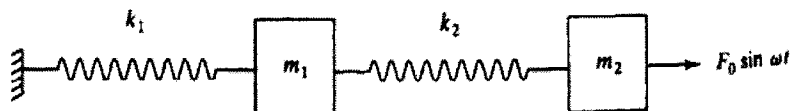
16. Tentukan rumus untuk frekuensi natural dan mode shapes untuk sistem getaran bebas 3 derajat kebebasan berikut ini:



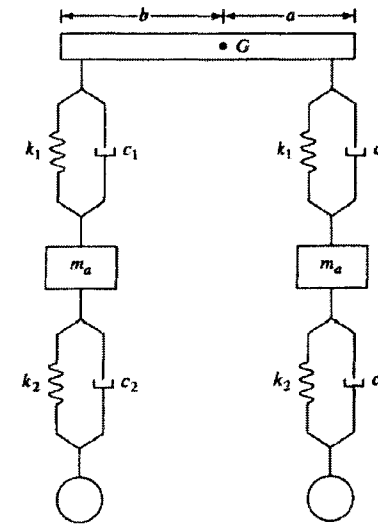
17. Tentukan rumus untuk amplitudo masing-masing massa dalam kondisi tunak (normal) dari sistem berikut ini:



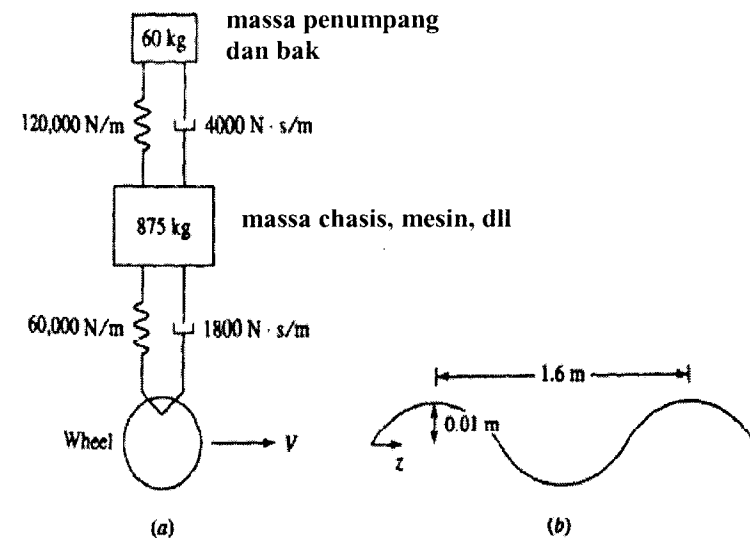
18. Tentukan rumus untuk amplitudo masing-masing massa dalam kondisi steady (normal) dari sistem di bawah ini!



19. Tentukan respons persamaan getaran bebas dari sistem 4 derajat kebebasan. Jika diketahui  $m = 800 \text{ kg}$ ,  $I = 175 \text{ kg m}^2$ ,  $k_1 = 1.5 \times 10^5 \text{ N/m}$ ,  $k_2 = 7.5 \times 10^4 \text{ N/m}$ ,  $m_a = 150 \text{ kg}$ , dan  $(a+b) = 2.4 \text{ m}$ , dari gambar berikut ini.



20. Pada model suspensi kendaraan dan penumpang di bawah ini, tempat duduk dimodelkan sebagai pegas dan damper secara paralel. Untuk sistem suspensi di bawah ini, tentukan plot akselerasi amplitudo dari penumpang, fungsi dari kecepatan kendaraan!



# **BAB 7**

## **JAWAB PERMASALAHAN MODEL GETARAN DENGAN MATLAB®**

Kompetensi yang ingin dicapai setelah mempelajari bab ini adalah:

1. Mampu melakukan operasi aritmatika dasar dan operasi matriks dengan MATLAB.
2. Mampu membuat kurva atau grafik hasil presentasi getaran untuk idealisasi dua dimensi dari persamaan getaran dengan menggunakan MATLAB.
3. Mampu menggunakan MATLAB sebagai peranti lunak untuk memecahkan permasalahan model getaran mekanis.

### **7.1 Pendahuluan**

Bab terakhir ini memberikan informasi bagaimana mendapatkan jawaban dari permasalahan model getaran *lump mass* yang dilakukan dengan bantuan peranti lunak untuk engineering atau teknik, yaitu MATLAB. MATLAB singkatan dari *MATrix LABoratory*, dibuat oleh Math Works Inc. Peranti lunak ini sangat luas digunakan oleh ilmuwan dan rekayasawan. MATLAB adalah sebuah peranti lunak interaktif dengan jawab permasalahan secara numerik yang dapat menyajikan data secara visual, misalnya dalam bentuk grafik. MATLAB mengintegrasikan komputasi matematik, visualisasi, dan bahasa pemrograman untuk keperluan komputasi teknik. Komposisi dan petunjuk operasional program MATLAB atau arsitektur merupakan contoh yang terbuka dan dapat dipelajari dengan mudah, misalnya pada sub bab 7.1 sampai sub bab 7.5. Program tambahan pada piranti lunak MATLAB banyak digunakan sehingga pengembangan peranti lunak ini dengan versi yang lebih *up to date* terus berlangsung. Bentuk peranti lunak yang dibuat oleh pemrogram lain pun dapat diintegrasikan dengan MATLAB.

MATLAB menyediakan bahasa untuk berkomunikasi dengan personal komputer (PC) secara intuitif sehingga pengguna dapat mengekspresikan permasalahannya dan mencari jawab atas permasalahan itu baik secara matematis maupun visual. Lingkup *kegunaan piranti lunak* MATLAB mencakup jawab permasalahan dengan berbagai cara, antara lain: melakukan perhitungan, penerapan konsep numerik, menyisipkan logika perhitungan, dan mengembangkan algoritma yang diinginkan. MATLAB antara lain *menyediakan*: simbol, rujukan fungsi, dan operasi matematik yang built in sebagai fungsi matematika. Program ini dapat *melakukan pengerjaan* antara lain untuk: modeling-simulasi-prototype, melakukan analisis data untuk diubah sesuai yang diinginkan, melakukan pemrosesan data berupa signal, membuat grafik, dan menampilkan visualisasi ilmiah untuk animasi. Jawab permasalahan model getaran merupakan salah satu lingkup MATLAB. Dalam *setiap eksekusi program*, proses berikut ini selalu dilakukan MATLAB yaitu: bagaimana membuat file, mengedit, menyimpan, dan men-debug sejumlah 'm-file', atau menelusuri logika program dari file berformat ASCII yang ditampilkan sebagai bahasa pemrograman MATLAB. *Fungsi matematika* rujukan termasuk persamaan getaran yang berhubungan dengan lingkup permasalahan dalam MATLAB misalnya adalah: transformasi Laplace, *ordinary differential equation* (ODE), *partial differential equation* (PDE), dan bagaimana memvisualisasikan jawaban atas permasalahan persamaan getaran dari idealisasi model.

Langkah awal untuk melakukan operasional piranti lunak MATLAB dilakukan dari *tampilan ikon* MATLAB. Tampilan ikon ini mengikuti prosedur dari window PC, yaitu:

**Start → All Program → MATLAB 7.0.1 (versi) → ikon MATLAB 7.0.1**

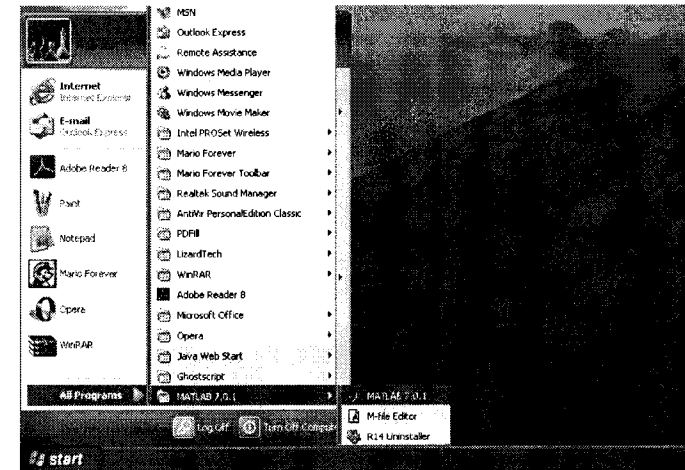
Tampilannya terlihat pada Gambar 7.1

Setelah dilakukan klik kiri (dapat dengan mouse), maka tampilan monitor sebagai interface dari MATLAB terlihat seperti Gambar 7.2

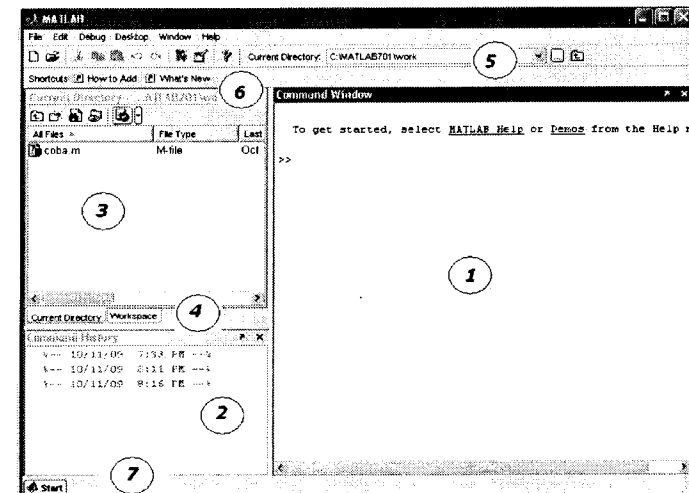
Tampilan monitor menunjukkan sedikitnya ada 7(tujuh) kemampuan utama untuk prosedur operasional selanjutnya, yaitu:

1. Window tempat menuliskan perintah langsung MATLAB
2. Command-history window
3. Window untuk menampakkan file yang aktif atau pernah dieksekusi

4. Window informasi rectory atau hidden. Tampilan ini sebagai alternatif workspace untuk variabel window-file lain
5. Ikon peranti lunak yang akan dioperasikan



Gambar 7.1 Start awal MATLAB



Gambar 7.2 Window MATLAB

6. Shortcut peranti lunak yang dipilih.
7. Tombol mulai.

## 7.2 Perintah Dasar Operasi MATLAB

Perintah dan tanda dasar yang perlu diketahui dari operasional keyboard pada peranti lunak MATLAB akan diuraikan dalam sub bab ini. Setiap penulisan perintah pada window, misalnya perintah untuk No. 1, bersesuaian dengan tampilan Gambar 7.1. Agar operasional dapat dilakukan, jangan lupa untuk selalu mengakhirinya dengan menekan tombol Enter. Berikut ini adalah contoh perintah dasar dalam Tabel 7.1

Tabel 7.1 Perintah Dasar MATLAB

| Tanda     | Perintah Dasar                                                                                        |
|-----------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Ctrl+c    | Membatalkan perintah.                                                                                 |
| ;         | Ditulis di akhir perintah, menyebabkan output dari perintah tidak ditampilkan pada monitor di window. |
| %         | Bila ditulis di depan baris maka baris itu akan dianggap sebagai komentar.                            |
| clc+Enter | Membersihkan window perintah                                                                          |

Contoh operasional MATLAB adalah statement pada MATLAB dengan perintah pada monitor:

```
>> x = 6.45
```

Perintah dasar ini menyatakan bahwa variabel 'x' berharga 6.45

Contoh lain, adalah penulisan bentuk matriks, misalkan matriks  $A$  berukuran  $2 \times 2$  yang terdiri dari  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ . Perintah dasar pada MATLAB adalah sebagai berikut:

```
>> A = [1 2 ; 3 4] <ret>
```

Pernyataan ini dijalankan dengan mengoperasikan keyboard. Setelah tombol Enter ditekan dan hasil yang diperoleh pada monitor adalah:

```
A =
     1     2
     3     4
```

## 7.3 Operator Aritmatika dan Matematika MATLAB

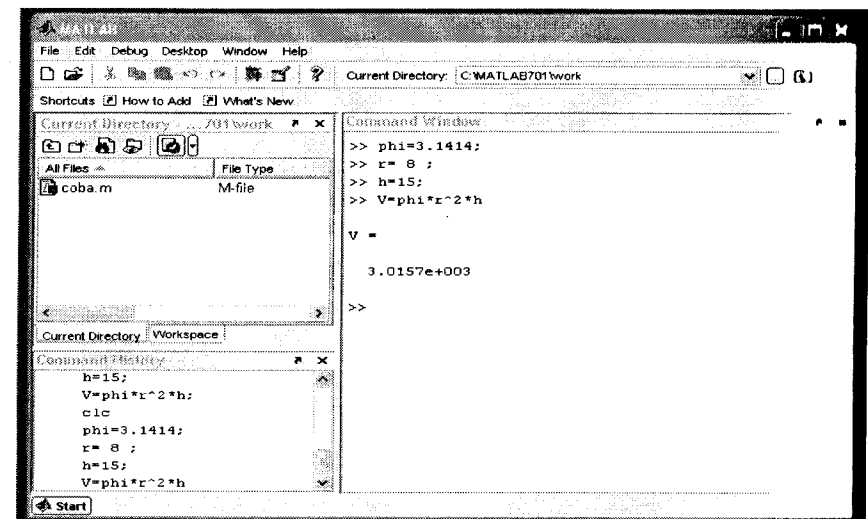
Untuk operasi aritmatika seperti penambahan, pengurangan, dan sebagainya, simbol yang dikenal MATLAB dinyatakan seperti pada Tabel 7.2.

Tabel 7.2 Simbol Operator Aritmatika MATLAB

| Operator Arimatika | Simbol | Contoh                      |
|--------------------|--------|-----------------------------|
| Penjumlahan        | +      | $6 + 3 = 9$                 |
| Pengurangan        | -      | $6 - 3 = 3$                 |
| Pembagian          | /      | $6/3 = 2$                   |
| Perkalian          | *      | $6 * 3 = 18$                |
| Pembagian balik    | \      | $6 \setminus 3 = 3/6 = 1/2$ |
| Eksponensial       | ^      | $6^3 = 216$                 |

### Contoh 7.1

Tentukan volume silinder dengan operasional keyboard MATLAB dan volume silinder memiliki persamaan  $V = \pi r^2 h$ . Jika diketahui tinggi silinder 15 m dan radiusnya 8 m, maka jawabnya adalah 3015,7 m<sup>3</sup>. Jawab ini ditampilkan monitor sesuai Gambar 7.1



Gambar 7.3 Jawaban permasalahan MATLAB Contoh 7.1

**Jawab:**

Penjelasan statement monitor tampilan MATLAB untuk memperoleh jawab atas permasalahan Contoh 7.1 dengan, Ketik dari keyboard, dan lihat tampilan monitor sebagai berikut:

```
>> phi=3.1414; (pendefinisian variabel phi, 'phi' berharga 3,1414)
>> r= 8; (pendefinisian variabel radius (r), 'r' berharga 8)
>> h=15; (pendefinisian variabel tinggi (h), 'h' berharga 15)
>> V=phi*r^2*h (Hasil perhitungan volume silinder tidak diakhiri oleh
tanda ; agar hasil perhitungannya ditampilkan)
V = 3.0157e+003 (hasil komputasi MATLAB)
```

Selain operator aritmatika, pada MATLAB juga tersedia beberapa fungsi standar matematika yang ditabulasikan pada Tabel 7.3.

**Tabel 7.3 Fungsi matematika standar MATLAB**

| Fungsi    | Deskripsi                                                              |
|-----------|------------------------------------------------------------------------|
| abs(x)    | Menghitung nilai absolut dari variabel x                               |
| sqrt(x)   | Menghitung akar dari variabel x                                        |
| exp(x)    | Menghitung $e^x$ di mana e adalah bilangan natural 2.718282.           |
| log (x)   | Menghitung ln x, natural logaritmik                                    |
| log 10(x) | Menghitung log <sub>10</sub> x                                         |
| sin(x)    | Menghitung sinus x dalam radian                                        |
| cos(x)    | Menghitung cosinus x dalam radian                                      |
| tan(x)    | Menghitung tangen x dalam radian                                       |
| asin(x)   | Menghitung invers sinus x                                              |
| acos(x)   | Menghitung invers cosinus x                                            |
| atan(x)   | Menghitung invers tangen x                                             |
| sinh(x)   | Menghitung sinus hipebolis x yang sama dengan $\frac{e^x - e^{-x}}{2}$ |
| cosh(x)   | Menghitung cos hipebolis x yang sama dengan $\frac{e^x + e^{-x}}{2}$   |
| tanh(x)   | Menghitung tan hipebolis x                                             |
| asinh(x)  | Menghitung invers sinus hipebolis x                                    |
| acosh(x)  | Menghitung invers cosinus hipebolis x                                  |
| atanh(x)  | Menghitung invers tangen hipebolis x                                   |

Selain fungsi standar matematika dari MATLAB, fungsi operasi bilangan kompleks terdapat dan ditabulasikan pada Tabel 7.4.

**Tabel 7.4 Fungsi Operasi Bilangan Kompleks MATLAB**

| Fungsi   | Deskripsi                                                                                          |
|----------|----------------------------------------------------------------------------------------------------|
| conj(x)  | Menghitung konjugasi bilangan kompleks.<br>Jika $x = a + ib$ maka konjugasinya adalah $x = a - ib$ |
| real(x)  | Menghitung bilangan nyata dari bilangan kompleks                                                   |
| imag(x)  | Menghitung bilangan imajiner dari bilangan kompleks                                                |
| abs(x)   | Menghitung nilai absolut dari besarnya bilangan kompleks x                                         |
| angle(x) | Menghitung sudut bilangan kompleks menggunakan '2(imag(x),real(x))'                                |

## 7.4 Operator Relasi dan Logika

Operator relasi adalah operator yang berfungsi untuk membandingkan dua nilai yang hasilnya berupa benar atau salah. Operator logika menguji sebuah statemen benar atau salah yang produknya juga merupakan pernyataan benar atau salah. Operator relasi dan logika digunakan dalam persamaan matematika dan juga merupakan kombinasi dengan perintah lain, untuk membuat suatu keputusan yang mengontrol aliran program komputer. Operator relasi dalam MATLAB diperlihatkan pada Tabel 7.5

**Tabel 7.5 Operasi relasi MATLAB**

| Operator Relasi | Interpretasi                 |
|-----------------|------------------------------|
| <               | Lebih kecil                  |
| <=              | Lebih kecil atau sama dengan |
| >               | Lebih besar                  |
| >=              | Lebih besar atau sama dengan |
| ==              | Sama dengan                  |
| ~=              | Tidak sama dengan            |

Selain operator logika di atas, ada juga fungsi bawaan dari MATLAB untuk operator logika, seperti operator logika AND yang fungsi MATLAB-nya adalah and(A, B), untuk logika OR fungsi MATLAB-nya adalah or(A, B), sedangkan untuk operator NOT maka fungsi MATLAB-nya adalah not(A). Operator logika diperlihatkan pada Tabel 7.6.

Tabel 7.6 Operasi logika MATLAB

| Operator Logika | Nama | Deskripsi                                                                                                                              |
|-----------------|------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| &<br>Contoh A&B | AND  | Jika kedua operand bernilai benar, maka hasilnya adalah 1, <i>selain itu</i> bernilai 0.                                               |
| <br>Contoh A B  | OR   | Jika salah satu operand bernilai benar, maka hasilnya adalah 1. Selain itu, jika kedua operand bernilai salah, maka hasilnya adalah 0. |
| ~<br>Contoh ~A  | NOT  | Operator memberikan nilai yang berlawanan. Jika operand bernilai benar, maka hasilnya adalah 0, dan bila sebaliknya maka hasilnya 1.   |

## 7.5 Array

Array adalah *susunan angka* dalam baris dan atau kolom. MATLAB dapat menyatakan array dalam satu dimensi. Satu dimensi ini dapat dinyatakan sebagai vektor baris atau vektor kolom.

### Contoh 7.2

Diberikan suatu vektor baris  $x = [1 \ 2 \ 3 \ 4]$  dengan input statement dari keyboard pada MATLAB. Bagaimana penulisan pada monitor?

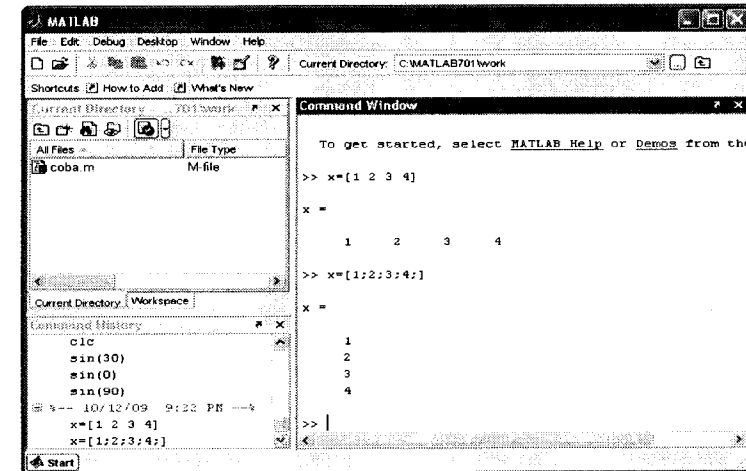
**Jawab:**

$x = [1 \ 2 \ 3 \ 4]$

Untuk vektor kolom  $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$  maka input statemen pada MATLAB adalah:

$x = [1; 2; 3; 4].$

Penulisan array satu dimensi dinyatakan pada Gambar 7.4.



Gambar 7.4 Vektor kolom MATLAB

Array dua dimensi adalah susunan angka dalam baris dan kolom. Array dua dimensi juga dikenal sebagai matriks. Elemen matriks bisa berupa bilangan real maupun bilangan kompleks. Dalam MATLAB, indikasi baris baru adalah penambahan tanda ; pada akhir bilangan, Gambar 7.5.

### Contoh 7.3

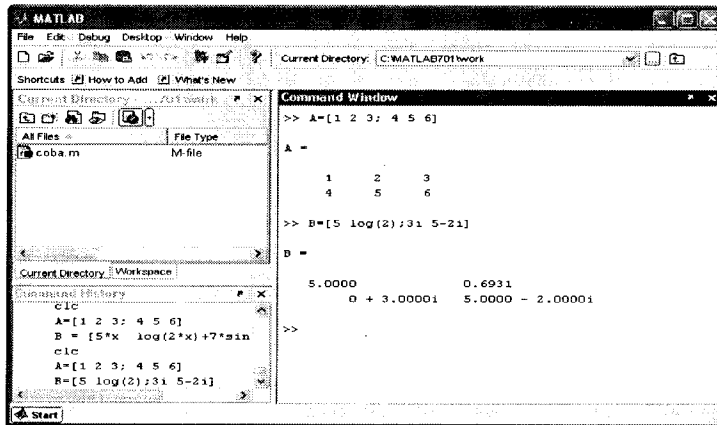
Diberikan matriks  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$  dan  $B = \begin{bmatrix} 5 & \ln 2 \\ 3i & 5-2i \end{bmatrix}$

Nyatakan input statemen pada MATLAB.

**Jawab:**

$A = [1 \ 2 \ 3; 4 \ 5 \ 6]$

$B = [5 \ \log(2); 3i \ 5-2i]$



Gambar 7.5 Hasil input untuk matriks A dan B

## 7.6 Operasi Matriks

Penjumlahan dan pengurangan matriks adalah penjumlahan dan pengurangan masing-masing elemen yang memiliki posisi yang sama.

Jika,  $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$ , dan  $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}$ , operator  $C = A + B$ ,

maka,  $C = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} \end{bmatrix}$

Perkalian matriks dalam operasi matriks berupa perkalian skalar (*dot product*), yaitu perkalian dua matriks yang ukurannya sama. Hasilnya berupa penjumlahan seluruh perkalian pada masing-masing posisi yang sama:

$$A \bullet B = \sum_{i=1}^n a_i b_i$$

Fungsi bawaan dari perkalian skalar ini adalah dot(A,B).

Perkalian matriks adalah hasil perkalian dua matriks dot produk dari baris ke- $i$  dari matriks pertama dengan kolom ke- $j$  dari matriks kedua yang dapat

diekspresikan sebagai berikut dengan,  $c_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j}$ . Contoh adalah:

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$ , dan  $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}$ ,  $C = AxB$  memberikan,

$$C = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{11}b_{21} & a_{12}b_{12} + a_{12}b_{22} & a_{13}b_{13} + a_{13}b_{23} \\ a_{21}b_{11} + a_{21}b_{21} & a_{22}b_{12} + a_{22}b_{22} & a_{23}b_{13} + a_{23}b_{23} \end{bmatrix}$$

Matriks identitas adalah matriks bujur sangkar atau matriks yang jumlah barisnya sama dengan jumlah kolom, di mana elemen diagonalnya bernilai 1 sedangkan yang lain bernilai 0. Sebagai contoh, matriks identitas 3 x 3 yaitu:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriks invers adalah perkalian dua matriks bujur sangkar yang menghasilkan matriks identitas yaitu:  $AB = BA = I$ . Matriks transpose adalah perubahan matriks di mana baris pada matriks asal akan menjadi kolom pada matriks yang baru. Transpose dari matriks A adalah  $A^T$ . Contoh matriks transpose dari matriks A, sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \text{ sehingga untuk } A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

Dalam MATLAB, statemen transpose adalah  $A'$ .

Pembagian matriks dalam MATLAB ada dua jenis, yaitu pembagian kiri dan pembagian kanan. Pembagian kiri digunakan untuk mendapatkan jawab permasalahan matriks  $x$  dari persamaan matriks  $Ax = B$ , di mana matriks  $x$  dan  $B$  adalah matriks kolom sehingga penyelesaiannya adalah  $x = A^{-1}B$ . Dalam MATLAB statemen, pembagian kiri ditulis dengan  $x = A \setminus B$ . Pembagian kanan digunakan untuk mendapatkan jawab atas permasalahan matriks  $x$  dari persamaan matriks  $xA = B$ , di mana matriks  $x$  dan  $B$  adalah matriks baris sehingga penyelesaiannya adalah  $x \bullet AA^{-1} = B \bullet A^{-1}$  atau  $x = B \bullet A^{-1}$  yang dalam bagian MATLAB statemen ditulis dengan  $x = B / A$ .



Determinan matriks adalah perhitungan skalar dari elemen matriks bujur sangkar. Contoh pada matriks  $A$  ukuran  $2 \times 2$ :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Maka determinan matriks  $A$  adalah:  $|A| = a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}$

*Eigenvalue* dan *eigenvektor* matriks merupakan fungsi bawaan MATLAB untuk determinan adalah  $\det(A)$ . Untuk *Eigenvalue* dan *eigenvektor*, mengikuti persamaan matriks berikut ini:

$$AX = \lambda X \quad (7.1)$$

' $A$ ' adalah matriks bujur sangkar  $n \times n$ , dan ' $X$ ' merupakan matriks kolom dengan ' $n$ ' baris, dan ' $\lambda$ ' adalah sebuah skalar. Nilai dari ' $\lambda$ ' untuk kondisi ' $X$ ' tak sama dengan nol, disebut dengan *eigenvalue* dari matriks  $A$ , dan yang berhubungan dengan harga ' $X$ ' dengan pemisalan salah satu orde matriks kolom ' $\lambda$ ' sama dengan 1(satu), disebut dengan *eigenvektor* dari matriks  $A$ . Persamaan 7.1 dapat juga digunakan untuk mendapatkan persamaan berikut:

$$(A - \lambda I)X = 0 \quad (7.2)$$

Dalam hal ini, ' $I$ ' adalah matriks identitas dari operasi ' $[n] \times [x]$ '. Persamaan 7.2 berhubungan dengan kumpulan dari persamaan homogen dengan jawab atas permasalahan *non-trivial* hanya jika determinannya yang berharga nol atau:

$$|A - \lambda I| = 0 \quad (7.3)$$

Persamaan 7.3 dikenal dengan *persamaan karekteristik* dari matriks  $A$ . Jawab permasalahan yang diberikan dari persamaan 7.3 adalah *eigenvalue* dari matriks  $A$ . MATLAB dapat menentukan baik *eigenvalue* maupun *eigenvektor* dari matriks  $A$ . Statement MATLAB untuk *eigenvalue* adalah ' $\text{eig}(A)$ '.  $[Q, d] = \text{eig}(A)$  adalah fungsi untuk menghitung matriks bujur sangkar  $Q$  yang berisikan *eigenvalue* matriks  $A$  pada diagonalnya. Harga  $Q$  dan  $d$  seperti  $Q^*Q$  adalah identitas matriks dan  $A^*X$  sama dengan  $\lambda \times X$ . Statemen operator matriks dalam MATLAB ditabulasikan pada tabel 7.7

Tabel 7.7 Operasi aritmatika matriks

| Operator Aritmatika |                     |
|---------------------|---------------------|
| Operator Matriks    | Operator Array      |
| + penjumlahan       | + penjumlahan       |
| - pengurangan       | - pengurangan       |
| * perkalian         | • * perkalian       |
| ^ pangkat           | • ^ pangkat         |
| / pembagian kiri    | • / pembagian kiri  |
| \ pembagian kanan   | • \ pembagian kanan |

#### Contoh 7.4

Lakukan tiga operasi matriks berikut ini dengan MATLAB, dua diantaranya adalah operasi penjumlahan dan perkalian berikut ini:

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ 10 & 3 \end{bmatrix}, \text{ dan } B = \begin{bmatrix} 9 & 8 \\ -12 & 14 \end{bmatrix}, \text{ untuk } A+B \text{ dan } A \times B$$

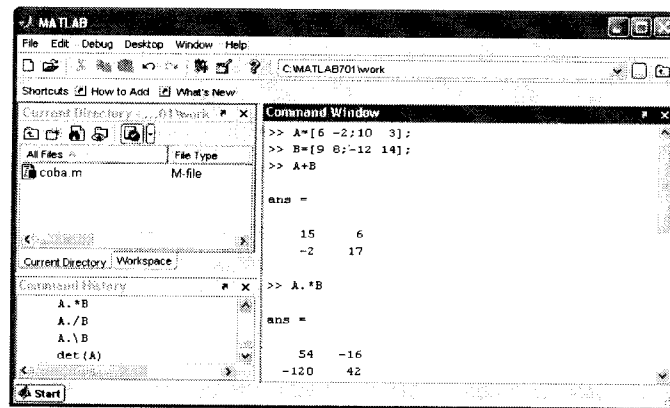
Kemudian operasi ke-3 adalah solusi persamaan simultan dari :

$$x_2 - 3x_3 = -5 \quad 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 7 \quad 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 10$$

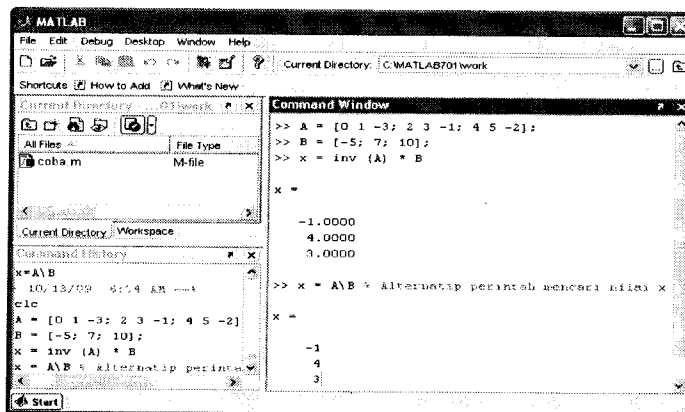
**Jawab:**

Hasil operasi aritmatika setelah penekanan dari tombol keyboard untuk hasil akhir penjumlahan dan perkalian dari matriks  $A$  dan  $B$ , dapat dilihat dalam monitor pada Gambar 7.6.

Kemudian untuk operasional dari penekanan keyboard persamaan simultan menghasilkan monitor pada Gambar 7.7. Gambar 7.7 berikut ini merupakan hasil dari tahapan untuk mencari nilai ' $x_1, x_2, x_3$ ', dari persamaan aljabar linier simultan.



Gambar 7.6 Perkalian dan penjumlahan A dan B



Gambar 7.7 Hasil operasi aritmatika fungsi invers

Jawab permasalahan untuk persamaan simultan *secara manual* adalah:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 4 & 5 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 10 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \text{ dan}$$

$$AX=B, \quad A^{-1}AX=A^{-1}B, \quad IX=A^{-1}B, \quad \text{ dan } X=A^{-1}B$$

Jawab permasalahan MATLAB dari operasi matriks ini dinyatakan pada monitor Gambar 7.7 yaitu,  $X_1 = -1$ ,  $X_2 = 4$ , dan  $X_3 = 3$ .

## 7.7 Visualisasi Grafik

MATLAB memiliki perintah bawaan yang dapat digunakan untuk: visualisasi grafik 2-dimensi (2D), overlay, visualisasi grafik 3-dimensi (3D), *mesh*, dan *surface plot*. Penjelasan masing-masing aplikasi grafik sebagai berikut:

### 1. Visualisasi Grafik 2D

Perintah dasar untuk memvisualisasikan dalam '2-D' dari penggunaan Fungsi Bawaan MATLAB sesuai Tabel 7.8, dengan contoh 'plot(x, y, style option)', atau 'fplot(function,limits)'. 'x dan y' adalah titik koordinat grafik.

Tabel 7.8 Fungsi bawaan MATLAB untuk plot data x-y

| Function   | Description                                       |
|------------|---------------------------------------------------|
| area       | Creates a filled area plot.                       |
| bar        | Creates a bar graph.                              |
| barh       | Creates a horizontal bar graph.                   |
| comet      | Makes an animated 2-D plot.                       |
| compass    | Creates arrow graph for complex numbers.          |
| contour    | Makes contour plots.                              |
| contourf   | Makes filled contour plots.                       |
| errorbar   | Plots a graph and puts error bars.                |
| feather    | Makes a feather plot.                             |
| fill       | Draws filled polygons of specified color.         |
| fplot      | Plots a function of a single variable.            |
| hist       | Makes histograms.                                 |
| loglog     | Creates plot with log scale on both x and y axes. |
| pareto     | Makes pareto plots.                               |
| pcolor     | Makes pseudo color plot of matrix.                |
| pie        | Creates a pie chart.                              |
| plotyy     | Makes a double y-axis plot.                       |
| plotmatrix | Makes a scatter plot of a matrix.                 |
| polar      | Plots curves in polar coordinates.                |
| quiver     | Plots vector fields.                              |
| rose       | Makes angled histograms.                          |
| scatter    | Creates a scatter plot.                           |
| semilogx   | Makes semilog plot with log scale on the x-axis.  |
| semilogy   | Makes semilog plot with log scale on the y-axis.  |
| stairs     | Plots a stair graph.                              |
| stem       | Plots a stem graph.                               |

*Style option* merupakan argumen yang bersifat opsional dan berisikan properti dari grafik, baik warna, jenis garis, atau penanda titik. *Style option* dapat dilihat pada Tabel 7.9. Selain itu ada beberapa fungsi penting bawaan MATLAB untuk memvisualisasikan 'style option' dalam 2-D.

Tabel 7.9 Style Option dari Fungsi Plot

| Color style-option |         | Line style-option |          | Marker style-option |               |
|--------------------|---------|-------------------|----------|---------------------|---------------|
| y                  | yellow  | —                 | solid    | +                   | plus sign     |
| m                  | magenta | --                | dashes   | O                   | circle        |
| c                  | cyan    | ...               | dotted   | *                   | asterisk      |
| r                  | red     | -.                | dash-dot | x                   | x-mark        |
| g                  | green   |                   |          | .                   | point         |
| b                  | blue    |                   |          | ^                   | up triangle   |
| w                  | white   |                   |          | s                   | square        |
| k                  | black   |                   |          | d                   | diamond, etc. |

## Contoh 7.5

Buatlah grafik dari persamaan berikut:

a.  $y = 1 - \cos 2x$  dari  $0 < x < 2\pi$

b.  $y = e^x$  dari  $0 < x < 2\pi$

Jawab:

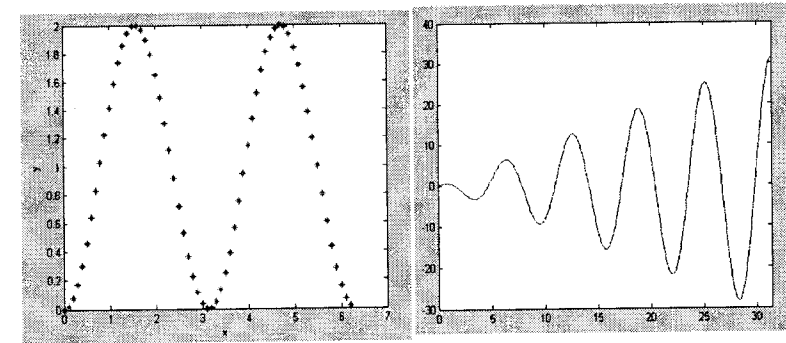
Ketikan pada keyboard dilakukan dengan tampilan monitor sebagai berikut:

```
a. >> x=0:.1:2*pi;
>> y=1-cos(2*x);
>> plot(x,y,'*')
>> xlabel('x')
>> ylabel('y')
b. >> fplot('x.*cos(x)', [0 10*pi])
```

Hasil kurva kedua fungsi ini dinyatakan pada Gambar 7.8

## 2. Visualisasi Grafik 3D

MATLAB menyediakan beberapa option untuk mendisplay data dalam bentuk tiga dimensi antara lain: line, wire, surface, dan meshplot.

Gambar 7.8 Hasil plot fungsi  $y = 1 - \cos 2x$  dan  $y = e^x$ 

Beberapa fungsi yang menggambarkan visualisasi grafik dalam bentuk tiga dimensi dapat dilihat pada Tabel 7.10.

Tabel 7.10 Fungsi bawaan MATLAB untuk plot data  $x$ - $y$ - $z$ 

| Perintah    | Uraian                                                                                                                                                                                                                                                 |
|-------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| plot3       | *Plot grafik 3D dengan tiga set persamaan $x(t)$ , $y(t)$ , dan $z(t)$ , menggunakan ' <b>plot3(x,y,z)</b> '                                                                                                                                           |
| meshgrid    | *Jika $x$ dan $y$ merupakan dua vektor dengan sebuah selang dari fungsi yaitu ' <b>[X,Y] = meshgrid(x,y)</b> ', maka hasilnya adalah grid $(x,y)$ dalam dua dimensi.                                                                                   |
| mesh(X,Y,z) | *Jika $X$ dan $Y$ merupakan koordinat kartesian dengan masing-masing harga $(x,y)$ , perintah ' <b>mesh(X,Y,z)</b> ' akan menghasilkan gambar perspektif 3D dari titik-titik kurva. Hasil sama dapat dilakukan dengan perintah ' <b>mesh(x,y,z)</b> '. |

## 3. File Script

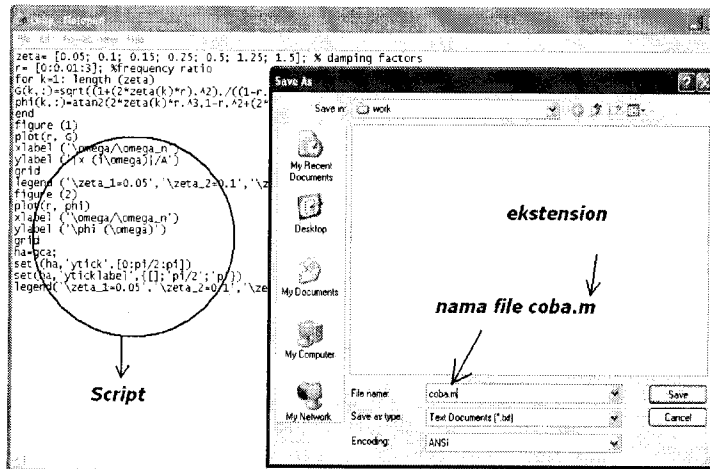
Sebuah script terdiri dari statemen sekuensial MATLAB dan fungsi yang digunakan pada *Command Prompt*. Script file sangat berguna untuk proses pengulangan jika ada perintah yang keliru atau tidak dikenali oleh MATLAB, terutama untuk program yang memiliki sekuensial panjang. Jika pengulangan file script ditulis langsung pada command window akan sulit untuk melacak dan memperbaikinya. Penulisan script dilakukan dengan menggunakan editor Windows atau program editor berbasis ASCII, seperti NotePad bawaan Windows. Setelah  $n$  fungsi MATLAB ditulis maka file itu disimpan dengan ekstensi  $m$  (M-file), Gambar 7.9.

Selain script, jenis file lain yang menggunakan *NotePad* ataupun *editor berbasis ASCII* adalah *function file*. Beda function file dari file script adalah

awal file dimulai dengan statemen standar untuk menyatakan dirinya sebagai fungsi. Formatnya adalah sebagai berikut:

function (nama hasil atau hasil) = name (argument list)

Function file merupakan salah satu upaya MATLAB untuk mengakomodasi fungsi matematis yang fasilitasnya belum disediakan oleh MATLAB.



Gambar 7.9 NotePad dan menyimpan m-file

## 7.8 Jawab Getaran dengan MATLAB

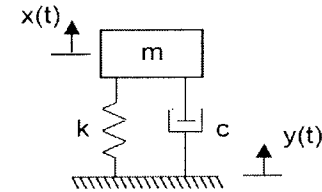
MATLAB memiliki koleksi perintah dan fungsi yang ekselen untuk analisis getaran. Permasalahan yang akan dibahas pada subbab ini adalah sistem getaran linier yang umum disajikan pada awal kuliah mengenai getaran. Aplikasi untuk mencari jawab permasalahan getaran pada bab ini diawali dengan ilustrasi. Untuk kasus getaran transien juga akan diberikan contoh aplikasinya dengan MATLAB.

### Contoh 7.6

Tulislah script MATLAB untuk menggambarkan:

- Besaran non-dimensional, respons displacement dari sistem dengan base bergerak secara harmonik seperti Gambar 7.10.

- Sudut phase respons untuk sistem base bergerak secara harmonik.



Gambar 7.10 Skema problem getaran Contoh 7.6

Jawab:

Persamaan respons frekuensi sesuai masalah getaran Gambar 7.9 diberikan oleh persamaan berikut:

$$|G(i\omega)| = \frac{1}{\left\{ \left[ \left( 1 - \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \right]^2 + \left( 2\zeta \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \right\}^{1/2}} \quad (7.4)$$

Persamaan respon dinamik displacement  $X(i\omega)$  diberikan dengan:

$$|X(i\omega)| = \sqrt{1 + \left( 2\zeta \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2} |G(i\omega)| A \quad (7.5)$$

di mana,

$$y(t) = \text{Re } A e^{i\omega t}; \quad x(t) = X(i\omega) e^{i\omega t}$$

Sudut phase dinyatakan dengan persamaan:

$$\phi(\omega) = \tan^{-1} \left[ \frac{2\zeta \left( \frac{\omega}{\omega_n} \right)^3}{\left( 1 - \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 + \left( 2\zeta \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2} \right] \quad (7.6)$$

Rasio frekuensi dinyatakan dengan,  $r = \frac{\omega}{\omega_n}$

Besaran respons non-dimensional sebagai kemampuan mentransmisikan getaran dengan persamaan berikut:

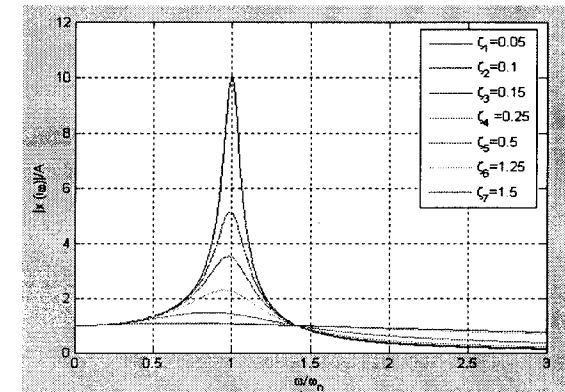
$$\frac{|X(i\omega)|}{A} = \left[ \frac{1 + \left( \frac{2\zeta\omega}{\omega_n} \right)^2}{1 - \left( \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 + \left( 2\zeta \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2} \right] \quad (7.7)$$

Berdasarkan persamaan-persamaan di atas, file script dari MATLAB ditulis:

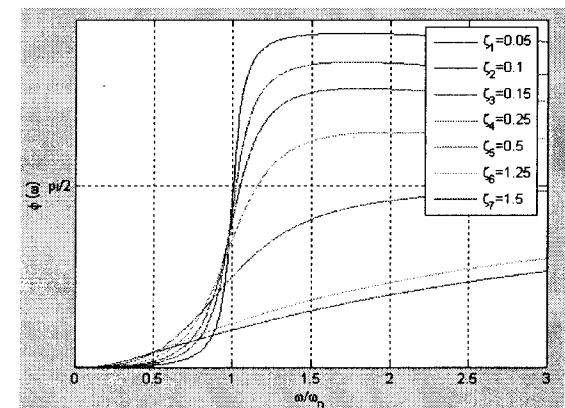
```
zeta = [0.05; 0.1; 0.15; 0.25; 0.5; 1.25; 1.5]; % faktor-  
faktor damping
```

```
r = [0:0.01:3]; % rasio frekuensi  
for k = 1 : length (zeta)  
    G(k,:) = sqrt((1+(2*zeta(k)*r).^2)./(1-r.^2).  
    ^2+(2*zeta(k)*r).^2));  
    phi(k,:) = atan2(2*zeta(k)*r.^3, 1-  
    r.^2+(2*zeta(k)*r).^2);  
end  
figure (1)  
plot(r, G)  
xlabel ('\omega/\omega_n')  
ylabel ('|x(i\omega)|/A')  
grid  
legend  
('\zeta_1=0.05', '\zeta_2=0.1', '\zeta_3=0.15',  
    '\zeta_4=0.25', '\zeta_5=0.5', '\zeta_6=1.25', '\zeta_7=1.5')  
figure (2)  
plot(r, phi)  
xlabel ('\omega/\omega_n')  
ylabel ('\phi (\omega)')  
grid  
ha=gca;  
set (ha, 'ytick', [0:pi/2:pi])  
set (ha, 'yticklabel', {[0; 'pi/2; 'p']})  
legend('\zeta_1=0.05', '\zeta_2=0.1', '\zeta_3=0.15',  
    '\zeta_4=0.25',  
    '\zeta_5=0.5', '\zeta_6=1.25', '\zeta_7=1.5')
```

Kurva non-dimensional, respons displacement dari sistem dengan base yang bergerak secara harmonik dan Sudut phase, dinyatakan sebagai output program MATLAB pada Gambar 7.11 dan Gambar 7.12.



Gambar 7.11 Hasil plot dari Contoh 7.6a



Gambar 7.12 Hasil plot dari Contoh 7.6b

### Contoh 7.7

Diberikan persamaan respons displacement getaran untuk sistem teredam satu derajat kebebasan dengan displacement adalah sebagai berikut:

$$x(t) = Ce^{-\zeta\omega_n t} \cos(\omega_d t - \phi)$$

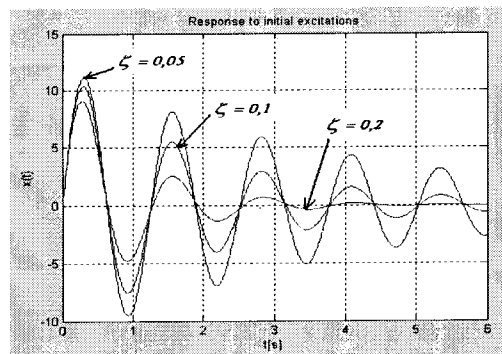
Gambar sistem getaran seperti Gambar 7.10, tetapi tanpa melibatkan  $y(t)$ . 'C' adalah amplitudo dan ' $\phi$ ' adalah sudut phase dari respons dengan persamaan sebagai berikut:

$$C = \sqrt{x_0^2 + \left( \frac{\zeta \omega_n x_0 + v_0}{\omega_d} \right)^2} \cdot \omega_d = \sqrt{1 - \zeta^2} \omega_n, \text{ dan } \phi = \tan^{-1} \left( \frac{\zeta \omega_n x_0 + v_0}{\omega_d x_0} \right)$$

Ditanyakan, plot respons sistem dengan MATLAB untuk,  $\omega_n = 5 \text{ rad/s}$ , dan  $\zeta = 0,05, 0,1, 0,2$ , dengan kondisi awal  $x(0) = 0, \dot{x}(0) = v_0 = 60 \text{ cm/detik}$ .

**Jawab:**

```
clear
clf
wn=5; % Frekuensi Natural
zeta=[0.05;0.1;0.2]; % Rasio Damping
x0=0; % Harga awal displacement
v0=60; % Harga awal kecepatan
t0=0; % Harga awal waktu
deltat=0.01; % Step waktu untuk plot
tf=6; % Waktu plot akhir
t=[t0:deltat:tf];
for i=1:length(zeta),
    wd=sqrt(1-zeta(i)^2)*wn; % Frekuensi Damping
    x=exp(-
        zeta(i)*wn*t).*((zeta(i)*wn*x0+v0)/wd)*sin(wd*t)
        + x0*cos(wd*t));
    plot(t,x)
    hold on
end
title('Response to initial excitations')
xlabel('t[s]')
ylabel('x(t)')
grid
```

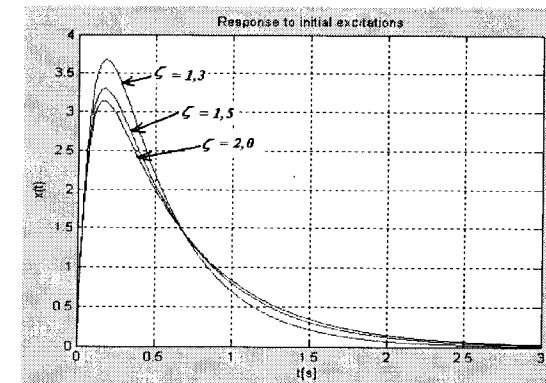


Gambar 7.13 Hasil plot respons dari Contoh 7.7

### Contoh 7.8

Kasusnya sama dengan permasalahan sebelumnya namun inisial kondisinya berbeda. Ditanyakan plot respons sistem menggunakan MATLAB untuk :  $\omega_n = 5$ , dan  $\zeta = 1.3, 1.5$ , dan  $2$  (overdamped), dengan kondisi awal  $x(0)=0$ , dan  $\dot{x}(0) = v_0 = 60 \text{ cm/s}$

**Jawab:**



Gambar 7.14 Hasil plot respons dari Contoh 7.8

### Contoh 7.9

Sebuah model penyederhanaan dari sistem suspensi otomotif seperti terlihat pada Gambar 7.15 di mana kendaraan berjalan di permukaan jalan yang kasar dengan kecepatan konstan ketika melintasi gundukan. Jika kecepatan mobil  $20 \text{ m/detik}$ , massa =  $1500 \text{ kg}$ ,  $k = 150000 \text{ N/m}$  dan  $\zeta = 0.1$ , tentukan respons displacement dari mobil dengan bantuan MATLAB.

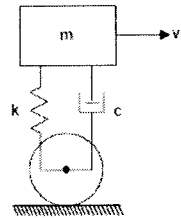
**Jawab:**

Persamaan displacement vertikal jalan adalah sebagai berikut:

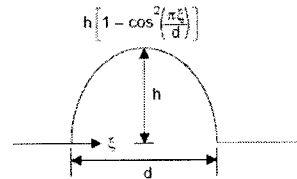
$$y(\xi) = h \left[ 1 - \cos^2 \left( \frac{\pi \xi}{d} \right) \right] [1 - u(\xi - d)] \quad (7.8)$$

Dengan  $h = 0,012$  m, dan  $d = 1$  m, untuk konstanta kecepatan mobil  $\xi = vt$ , maka persamaan displacement vertikal dari roda  $y(t)$  adalah:

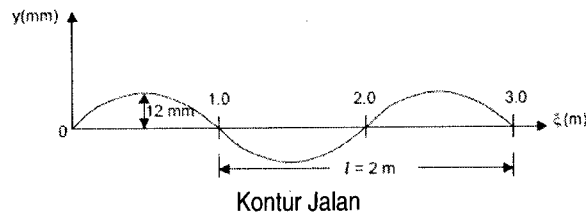
$$y(t) = h \left[ 1 - \cos^2 \left( \frac{\pi v}{d} t \right) \right] \left[ 1 - u \left( t - \frac{d}{v} \right) \right] \quad (7.9)$$



SDOF Sederhana



Eksitasi Asumsi Sinus gundukan



Gambar 7.15 Model suspensi otomotif

Respons sistem dengan integral konvolusi dirumuskan sebagai berikut:

$$x(t) = -m_{eq} \int_0^t 2\zeta\omega_n \dot{y}(\tau) + \omega_n^2 y(\tau) h(t-\tau) d\tau \quad (7.10)$$

Sehingga, kecepatan roda menjadi:

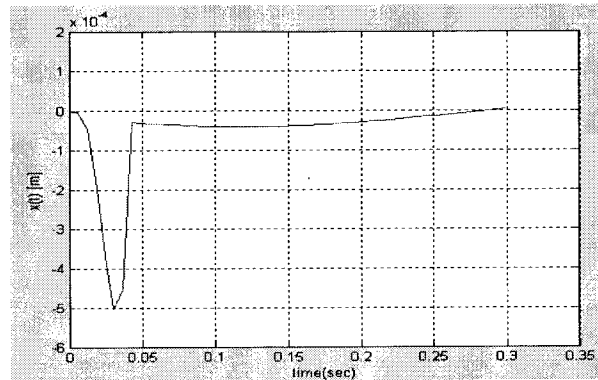
$$\dot{y}(t) = 2 \left( \frac{\pi v}{d} \right) \sin \left( \frac{2\pi v}{d} t \right) \left[ 1 - u \left( t - \frac{d}{v} \right) \right] \quad (7.11)$$

File script MATLAB-nya adalah sebagai berikut:

```
% model sdof sistem suspensi kendaraan
% kendaraan meluncur pada jalan dengan model jalan
puls sinusoidal
% y(t)=h(1-(cos(pi*v*t/ t0))^2)*(u(t)-u(t-d/v))
```

```
%integral konvolusi digunakan untuk evaluasi respon
sistem
% parameter-parameter input
digits(10)
format short e
m=1500;
k=150000;
zeta=0.10;
hb=0.012;
d=1.0;
v=20;
% parameter=parameter sistem dan batasan atau konstrain
omega_n=sqrt(k/m); % frekuensi natural
omega_d=omega_n*sqrt(1-zeta^2); % frekuensi natural
kondisi redaman
c1=pi/d;
% displacement and kecepatan roda
% MATLAB menyebut 'Heaviside' untuk sebuah step unit
fungsi
y=hb*(1-cos(c1*v*t)^2)*(1-sym('Heaviside(t-0.04)'));
ydot=hb*c1*sin(2*c1*v*tau)*(1-sym('Heaviside(tau-
0.04)'));
%evaluasi integral konvolusi
h=exp(-zeta*omega_n*(t-tau)).*sin(omega_d*(t-
tau))/(m*omega_d);
g1=-2*zeta*m*omega_n*ydot*h;
g2=-omega_n^2*m*y*h;
g1a=vpa(g1,5);
g2a=vpa(g2,5);

I1=int(g1a,tau,0,t);
I1a=vpa(I1,5);
I2=int(g2a,tau,0,t);
I2a=vpa(I2,5);
x1=I1a+I2a;
x=vpa(x1,5);
vel=diff(x);
acc=diff(vel);
time=linspace(0,0.3,50);
for i=1:50
x1=subs(x,t,time(i));
xa(i)=vpa(x1);
end
xp=double(xa);
plot(time,xp,'-');
grid;
xlabel('time(sec)')
ylabel('x(t) [m]')
```

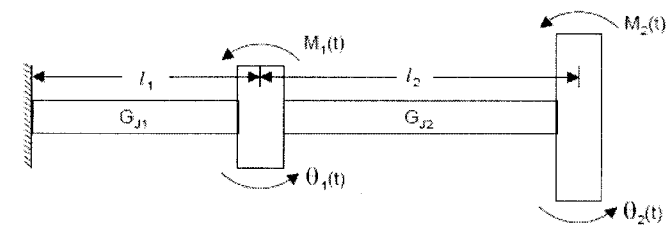


Gambar 7.16 Hasil plot respons Contoh 7.9

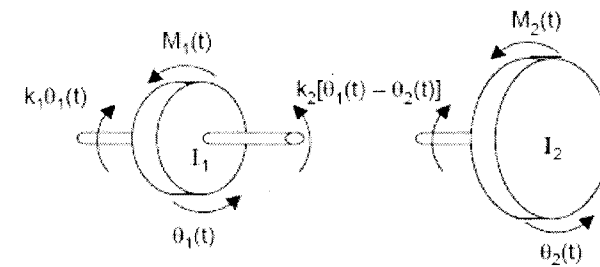
**Contoh 7.10**

Gambar 7.17 memperlihatkan dua piringan dengan massa momen inersia polar  $I_1$  dan  $I_2$  dipasangkan pada poros yang memiliki kekakuan torsional  $G_{J1}$  dan  $G_{J2}$ . Dengan mengabaikan massa poros, maka:

1. Tentukan persamaan diferensial dari gerakan untuk perpindahan angular dari piringan!
2. Tentukan frekuensi natural dan mode natural sistem jika  $I_1 = I_2 = I$ ,  $G_{J1} = G_{J2} = G_J$ ,  $l_1 = l_2 = l$ !
3. Tentukan respons sistem terhadap torsi  $M_1(t) = 0$  dan  $M_2(t) = M_2 e^{-\omega t}$  dalam waktu diskrit!
4. Tentukan respons sistem terhadap torsi  $M_1(t) = 0$  dan  $M_2(t) = M_2 e^{-\omega t}$ !
5. Tentukan dalam waktu diskrit respons sistem terhadap torsi  $M_1(t) = 0$  dan  $M_2(t) = M_2 e^{-\omega t}$  menggunakan MATLAB!



Gambar 7.17 Skema sistem Contoh 7.10



Gambar 7.18 Free body diagram sistem Contoh 7.10

**Jawab:**

Penentuan dengan perhitungan manual sebagai berikut,

Persamaan gerak cara Newton atau Lagrange dari gambar 7.18 adalah:

$$\begin{aligned} I_1 \ddot{\theta}_1 &= M_1 - k_1 \theta_1 + k_2 (\theta_2 - \theta_1) \\ I_2 \ddot{\theta}_2 &= M_2 - k_2 (\theta_2 - \theta_1) \end{aligned} \quad (7.12)$$

dengan harga kekakuan menjadi,  $k_i = \frac{GJ_i}{L_i}$ ,  $i = 1, 2$

Persamaan di atas disusun ulang menjadi:

$$\begin{aligned} I_1 \ddot{\theta}_1 + \left( \frac{GJ_1}{L_1} + \frac{GJ_2}{L_2} \right) \theta_1 - \frac{GJ_2}{L_2} \theta_2 &= M_1 \\ I_2 \ddot{\theta}_2 - \frac{GJ_2}{L_2} \theta_1 + \frac{GJ_2}{L_2} \theta_2 &= M_2 \end{aligned}$$



Dalam bentuk matriks, persamaan di atas menjadi:

$$\begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{GJ_1}{L_1} + \frac{GJ_2}{L_2} & -\frac{GJ_2}{L_2} \\ -\frac{GJ_2}{L_2} & \frac{GJ_2}{L_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} \quad (7.13)$$

Dengan kondisi yang diketahui yaitu,  $I_1 = I_2 = I$ ,  $GJ_1 = GJ_2 = GJ$ ,  $L_1 = L_2 = L$

Maka persamaan matriks getaran menjadi:

$$M \ddot{\theta}(t) + K \theta(t) = 0$$

dengan,  $M = I \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $K = \frac{GJ}{L} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $\theta(t) = \begin{bmatrix} \theta_1(t) \\ \theta_2(t) \end{bmatrix}$

Matriks massa 'M', dan matriks kekakuan 'K', dan  $\theta(t)$  konfigurasi vektor. Jawaban permasalahan persamaan gerak dapat diasumsikan sebagai:

$$\theta_i(t) = \Theta_i e^{i\omega t}, i = 1, 2$$

' $\omega$ ' adalah frekuensi osilasi, dan  $\Theta = [\Theta_1, \Theta_2]^T$  adalah konstanta vektor, sehingga kita dapat mendefinisikan parameter karakteristik sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Theta_1 \\ \Theta_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \Theta_1 \\ \Theta_2 \end{bmatrix}, \quad \lambda = \omega^2 \frac{IL}{GJ}$$

Persamaan karakteristiknya ditulis sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0$$

Eigenvaluennya adalah:  $\lambda_1 = \frac{3}{2} \mp \frac{\sqrt{5}}{2}$

Dua frekuensi natural menjadi:  $\omega_1 = 0,618 \sqrt{GJ/IL}$ ,  $\omega_2 = 1,618 \sqrt{GJ/IL}$

Perlu diperhatikan, modal vektor berhubungan dengan  $\lambda_1$ , memberikan  $\Theta = [\Theta_1, \Theta_2]^T$ . Modal vektor dari persamaan matriks adalah:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Theta_{11} \\ \Theta_{21} \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} \Theta_{11} \\ \Theta_{21} \end{bmatrix} = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \begin{bmatrix} \Theta_{11} \\ \Theta_{21} \end{bmatrix}, \quad \Theta_1 = \Theta_{11} \begin{bmatrix} 1 \\ 1,6180 \end{bmatrix}$$

Dengan cara yang sama untuk,  $\Theta_2 = [\Theta_{12}, \Theta_{22}]^T$ , kita memperoleh:

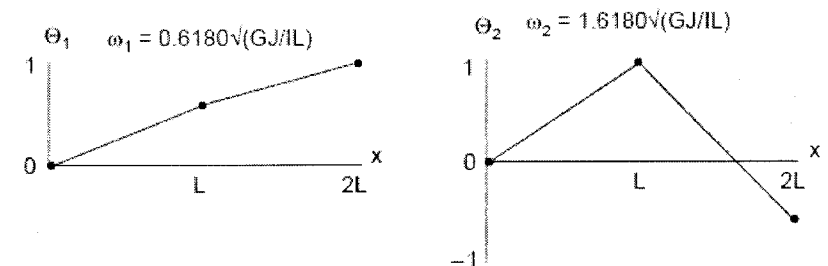
$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Theta_{12} \\ \Theta_{22} \end{bmatrix} = \lambda_2 \begin{bmatrix} \Theta_{12} \\ \Theta_{22} \end{bmatrix} = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \begin{bmatrix} \Theta_{12} \\ \Theta_{22} \end{bmatrix}, \text{ dan:}$$

$$\Theta_2 = \Theta_{12} \begin{bmatrix} 1 \\ 1,6180 \end{bmatrix}$$

Diperoleh modal vektor dari persamaan matriks ini menjadi:

$$\Theta_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix}, \text{ dan } \Theta_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix}$$

Modal vektor dinyatakan pada gambar di bawah ini.



Dari persamaan gerak SDOF, jawaban permasalahan  $\theta(t)$  menjadi:

$$\theta(t) = \eta_1(t) \Theta_1 + \eta_2(t) \Theta_2 \quad (7.14)$$

$\eta_1(t)$  dan  $\eta_2(t)$  adalah koordinat modal.  $\Theta_1$  dan  $\Theta_2$  adalah modal vektor.

Persamaan getaran modal dapat ditulis sebagai berikut:

$$\begin{aligned} m_{11} \ddot{\eta}_1(t) + m_{11} \omega_1^2 \eta_1(t) &= N_1(t) \\ m_{22} \ddot{\eta}_2(t) + m_{22} \omega_2^2 \eta_2(t) &= N_2(t) \end{aligned} \quad (7.15)$$

Frekuensi natural diberikan oleh persamaan berikut:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2} \frac{GJ}{IL}}, \omega_2 = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2} \frac{GJ}{IL}}$$

Koefisien modal menjadi:

$$\begin{aligned} m_{11} &= \Theta_1^T M \Theta_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix} = \frac{5+\sqrt{5}}{2} \\ m_{22} &= \Theta_2^T M \Theta_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix} = \frac{5-\sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

Eksitasi persamaan getaran menjadi sebagai berikut:

$$\begin{aligned} N_1(t) &= \Theta_1^T M(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 \\ M_2 e^{-\alpha t} \end{bmatrix} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} M_2 e^{-\alpha t} \\ N_2(t) &= \Theta_2^T M(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 \\ M_2 e^{-\alpha t} \end{bmatrix} = \frac{1-\sqrt{5}}{2} M_2 e^{-\alpha t} \end{aligned}$$

Jawaban permasalahan  $\eta_1(t)$  dan  $\eta_2(t)$  dari persamaan modal ditulis dalam bentuk integral konvolusi:

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \frac{1}{m_{11} \omega_1} \int_0^t N_1(t-\tau) \sin \omega_1 \tau \, d\tau \\ &= \frac{1+\sqrt{5}}{(5+\sqrt{5})(\alpha^2 + \omega_1^2)} \frac{M_1}{I} \left[ e^{-\alpha t} (\cos \omega_1 t) - \frac{\alpha}{\omega_1} \sin \omega_1 t \right] \\ \eta_2 &= \frac{1-\sqrt{5}}{(5-\sqrt{5})(\alpha^2 + \omega_2^2)} \frac{M_2}{I} \left[ e^{-\alpha t} (\cos \omega_2 t) - \frac{\alpha}{\omega_2} \sin \omega_2 t \right] \end{aligned}$$

Dua frekuensi natural dengan ' $\omega_1$  dan  $\omega_2$ ' diberikan pada persamaan sebelumnya, sehingga respons getaran dapat ditulis sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \theta_1(t) &= \eta_1(t) + \eta_2(t) \\ \theta_2(t) &= \frac{1+\sqrt{5}}{2} \eta_1(t) + \frac{1-\sqrt{5}}{2} \eta_2(t) \end{aligned}$$

Persamaan getaran torsi dinyatakan sebagai berikut:

$$M \ddot{\theta}(t) + k \theta(t) = M(t) \quad (7.16)$$

Harga parameter persamaan 7.16 sebagai berikut:

$$M = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, K = \frac{GJ}{L} \begin{bmatrix} 2 & -I \\ -I & I \end{bmatrix}, \theta(t) = \begin{bmatrix} \theta_1(t) \\ \theta_2(t) \end{bmatrix}, M(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ M_2 e^{-\alpha t} \end{bmatrix}$$

Asumsi bentuk jawab permasalahan dari  $\theta(t)$  diberikan sebagai berikut:

$$\theta(t) = \eta_1(t) \Theta_1 + \eta_2(t) \Theta_2$$

$\eta_1(t)$  dan  $\eta_2(t)$  adalah koordinat modal.  $\Theta_1$  dan  $\Theta_2$  adalah modal vektor.

$$\Theta_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix}, \Theta_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix}$$

Persamaan modal menjadi sebagai berikut:

$$m_{11} \ddot{\eta}_1(t) + m_{11} \omega_1^2 \eta_1(t) = N_1(t)$$

$$m_{22} \ddot{\eta}_2(t) + m_{22} \omega_2^2 \eta_2(t) = N_2(t)$$

Frekuensi natural adalah:  $\omega_1 = \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2} \frac{GJ}{IL}}$ ,  $\omega_2 = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2} \frac{GJ}{IL}}$

Modal koefisien massa menjadi:  $m_{11} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ,  $m_{22} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

Gaya modal menjadi:  $N_1(t) = \frac{1+\sqrt{5}}{2} M_2 e^{-\alpha t}$ ,  $N_2(t) = \frac{1-\sqrt{5}}{2} M_2 e^{-\alpha t}$

Respons diberikan dengan:

$$\theta(n) = \eta_1(n) \Theta_1 + \eta_2(n) \Theta_2, n = 1, 2, \dots \quad (7.17)$$

di mana  $\eta_1(n) = \sum_{k=0}^n N_1(k) g_1(n-k)$

$$\eta_2(n) = \sum_{k=0}^n N_2(k) g_2(n-k), n = 1, 2, \dots$$

Waktu diskrit dari koordinat modal diberikan dalam bentuk penjumlahan konvolusi. Respons waktu diskrit adalah:

$$g_i(n) = \frac{T}{m_{ii} \omega_i} \sin n \omega_i T, i = 1, 2$$

'T' adalah periode sampling. Respons waktu diskrit adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \theta(n) &= T \sum_{k=0}^n \left\{ \left[ \frac{N_1(k)}{m_{11} \omega_1} \sin(n-k) \omega_1 T \right] \Theta_1 + \left[ \frac{N_2(k)}{m_{22} \omega_2} \sin(n-k) \omega_2 T \right] \Theta_2 \right\} \\ &= \frac{TM_2}{\sqrt{GJ/IL}} \sum_{k=0}^n \left\{ e^{-\alpha k T} \sin(n-k) 0,618034 \sqrt{\frac{GJ}{IL}} T \begin{bmatrix} 0,7236907 \\ 1,17082 \end{bmatrix} \right. \\ &\quad \left. + e^{-\alpha k T} \sin(n-k) 1,618034 \sqrt{\frac{GJ}{IL}} T \begin{bmatrix} -0,272393 \\ 0,17082 \end{bmatrix} \right\} \end{aligned}$$

Dalam hal ini,  $\sqrt{GJ/IL} = 1$ ,  $M_2/I = 1$ ,  $\alpha = 1$  dan  $T = 0,01$  s, maka respons yang diberikan adalah:

$$\theta(n) = 0,01 \sum_{k=0}^n e^{-0,01k} \left\{ \sin 0,618034(n-k) T \begin{bmatrix} 0,7236907 \\ 1,17082 \end{bmatrix} + \sin 1,618034(n-k) T \begin{bmatrix} -0,272393 \\ 0,17082 \end{bmatrix} \right\}$$

Respons sekuensial waktu diskrit diperoleh:

$$\theta(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \theta(1) &= 0,01 \left\{ \sin 0,00618034 \begin{bmatrix} 0,7236907 \\ 1,17082 \end{bmatrix} + \sin 0,01618034 \begin{bmatrix} -0,272393 \\ 0,17082 \end{bmatrix} \right\} \\ &= \begin{bmatrix} 1,82291 \times 10^{-9} \\ 9,9999 \times 10^{-5} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

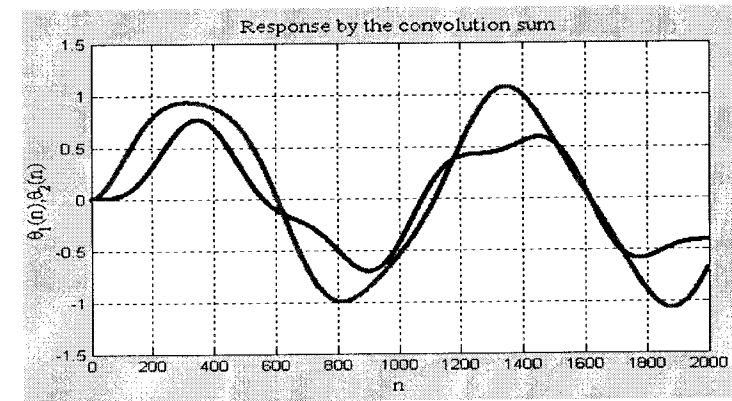
$$\begin{aligned} \theta(2) &= 0,01 \left\{ \left[ \sin(0,00618034 \times 2) + e^{-0,01} \sin 0,00618034 \right] \begin{bmatrix} 0,723607 \\ 1,17082 \end{bmatrix} \right. \\ &\quad \left. + \left[ \sin(0,0161803 \times 2) + e^{-0,01} \sin 0,0161803 \right] \begin{bmatrix} -0,276393 \\ 0,170820 \end{bmatrix} \right\} \\ &= \begin{bmatrix} 1,54497 \times 10^{-8} \\ 2,990 \times 10^{-4} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Script MATLAB semua persamaan di atas dengan respons  $\theta_i(n)$  ( $i=1,2$ ) menjadi:

```

MATLAB program.
% respon sistem dua DOF
clear
clf
I=1; % initial massa
k=1;%GJ/L kekakuan torsi
M=I*[1 0;0 1];% matriks massa
K=k*[2 -1;-1 1];% matriks kekakuan
[u,W]=eig(K,M);% masalah eigenvalue
% W= eigenvalues
u(:,1)=u(:,1)/max(u(:,1)); % normalisasi eigenvector
u(:,2)=u(:,2)/max(u(:,2));
[w(1),I1]=min(max(W)); % parameter eigenvalue diberi label baru
[w(2),I2]=max(max(W));
w(1)=sqrt(w(1)); % frekuensi natural terendah
w(2)=sqrt(w(2)); % frekuensi natural tertinggi
U(:,1)=u(:,I1); % parameter eigenvector diberi label baru
U(:,2)=u(:,I2);
m1=U(:,1)'*M*U(:,1); % perhitungan massa
m2=U(:,2)'*M*U(:,2);
T=0.01; % asumsikan untuk periode waktu tertentu
N=2000; % asumsi waktu total komputasi
M2=1; % harga torsi pada piringan ke-2
alpha=1;
n=[1:N];
N1=U(:,1)'*[zeros(1,N);M2*exp(-alpha*n*T)]; % gaya-gaya
N2=U(:,2)'*[zeros(1,N);M2*exp(-alpha*n*T)];
g1=T*sin((n-1)*w(1)*T)/(m1*w(1)); %respon impuls waktu diskrit
g2=T*sin((n-1)*w(2)*T)/(m2*w(2));
c1=conv(N1,g1); %hasil integral konvolusi
c2=conv(N2,g2);
theta=U(:,1)*c1(1:N)+U(:,2)*c2(1:N); % N jumlah sampling untuk plot
n=[0:N-1];
axes('position',[0.1 0.2 0.8 0.7])
plot(n,theta(1,:),'.',n,theta(2,:),'.')
h=title('Response by the convolution sum');
set(h,'FontName','Times','FontSize',12)
h=xlabel('n')
set(h,'FontName','Times','FontSize',12)
h=ylabel('\theta_1(n),\theta_2(n)');
set(h,'FontName','Times','FontSize',12)
grid

```

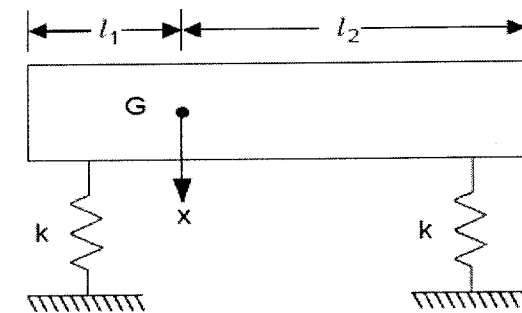


Gambar 7.19 Respons sistem getaran dari Contoh 7.10

### Contoh 7.11

Sebuah model suspensi otomotif sederhana diperlihatkan dalam Gambar 7.20 sebagai dua derajat kebebasan.

Tuliskan script MATLAB untuk menentukan frekuensi natural model dengan



Gambar 7.20 Model suspensi otomotif dari Contoh 7.11

Persamaan diferensial gerakan dua derajat kebebasan adalah sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & (l_2 - l_1)k \\ (l_2 - l_1)k & (l_2^2 - l_1^2)k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7.18)$$

'x' adalah displacement dari pusat massa dan  $\theta$  adalah rotasi angular dari body pada posisi horizontal. Diketahui parameternya adalah sebagai berikut:

Berat mobil,  $W = 5000$  lb  
 Centroidal moment of inertia,  $I = 400$  slug-ft<sup>2</sup>  
 Spring stiffness,  $k = 2500$  lb/ft  
 $l_1 = 3.4$  ft  
 $l_2 = 4.6$  ft

### Jawab:

Program MATLAB diberikan sebagai berikut:

```
%sistem dua dof
W=input('Berat mobil (lb)');
I=input('Momen Inersia Massa (slugs-ft^2)');
k=input('Stiffness (lb/ft)');
a=input('Jarak dari rear springs terhadap cg (ft)');
b=input('Jarak dari front springs terhadap cg (ft)');
% matriks massa
g=32.2;
m=W/g;
M=[m,0;0,I];
% matriks kekakuan
K=[2*k,(b-a)*k;(b-a)*k,(b^2+a^2)*k];
% perhitungan eigenvalue dan eigenvector
C=inv(M)*K;
[V,D]=eig(C);
om_1=sqrt(D(1,1));
om_2=sqrt(D(2,2));
X1=[V(1,1);V(2,1)];
X2=[V(1,2);V(2,2)];
% Output
disp('Berat Mobil (lb)='); disp(W)
disp('Inersia Momen (slugs-ft^2)='); disp(I)
disp('Stiffness (lb/ft)='); disp(k)
disp('Jarak dari pegas rear terhadap cg (ft)=');
disp(a)
disp('Jarak dari pegas front terhadap cg
(ft)='); disp(b)
disp('Matriks Massa'); disp(M)
disp('Matriks Kekakuan'); disp(K)
disp('Frekuensi Natural (rad/detik)=');
disp(om_1)
disp(om_2)
disp('Vektor Modus Getar'); disp(X1)
disp(X2)
```

Jawab permasalahan dari perhitungan MATLAB diperoleh:

Berat Mobil (lb) = 5000  
 Inersia Momen (slugs-ft<sup>2</sup>) = 400  
 Stiffness (lb/ft) = 2500  
 Jarak dari pegas rear terhadap cg (ft) = 3.4000  
 Jarak dari pegas front terhadap cg (ft) = 4.6000

Mass-matrix:

|          |        |
|----------|--------|
| 155.2795 | 0      |
| 0        | 400.00 |

Stiffness-matrix

|          |        |
|----------|--------|
| 1.0e+004 |        |
| 0.5000   | 0.3000 |
| 0.3000   | 8.1800 |

Frekuensi Natural (rad/detik)=

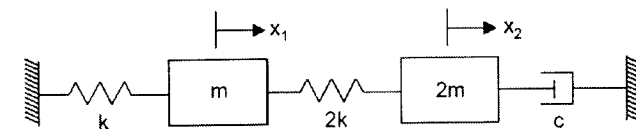
5.6003  
 14.3296

Vektor Modus Getar

-0.9991  
 0.0433  
 -0.1109  
 -0.9938

### Contoh 7.12

Tentukan respons sistem dua derajat kebebasan yang diperlihatkan pada Gambar 7.21 dengan *initial condition*  $x_1(0)=0$ ,  $x_2(0)=0,005$  m,  $\dot{x}_1(0)=0$ ,  $\dot{x}_2(0)=0$  ! Parameter yang lainnya adalah  $m = 30$  kg,  $k = 20000$  N/n, dan  $c = 150$  N.s/m



Gambar 7.21 Skema sistem getaran Contoh 7.12

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & 2m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3k & -2k \\ -2k & 2k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

atau  $M \ddot{y} + k y = 0$

$$\text{di mana } M = \begin{bmatrix} 0 & M \\ M & c \end{bmatrix}; K = \begin{bmatrix} -M & 0 \\ 0 & K \end{bmatrix}; Y = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ x \end{bmatrix}$$

**Jawab:**

Permasalahan solusi displacement getaran diasumsikan sebagai berikut:

$$y = \phi e^{-\gamma t}$$

Di mana  $\gamma$  adalah eigenvalue dari  $M^{-1}K$  dan  $\phi$  adalah eigenvector. Jawab permasalahan umum adalah kombinasi linier semua jawab permasalahan sebagai berikut:

$$y = \sum_{j=1}^4 c_j \phi_j e^{-\gamma_j t}$$

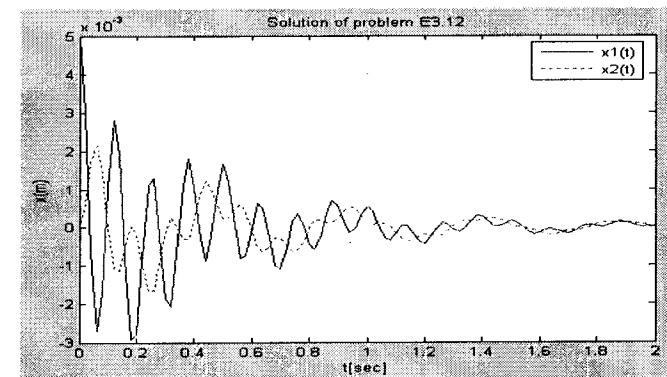
Aplikasi dari kondisi awal memberikan persamaan sebagai berikut:

$$y = \sum_{j=1}^4 c_j \phi_j = VC \quad \text{dan} \quad C = V^{-1} y_0$$

Jawab permasalahan script MATLAB menjadi:

```
m=30; % harga massa
k=20000; % harga kekakuan
c=150; % harga damping
% orde matriks 4 x 4
disp('4 x 4 Matrix Massa');
mt=[0,0,m,0;0,0,0,2*m;m,0,0,0;0,2*m,0,c];
disp('4 x 4 Matriks Kekakuan');
kt=[-m,0,0,0;0,-2*m,0,0;0,0,3*k,-2*k;0,0,-2*k,2*k];
Z=inv(mt)*kt;
[V,D]=eig(Z);
disp('Eigenvalues');
disp('Kondisi Awal');
x0=[0;0;0.005;0]
```

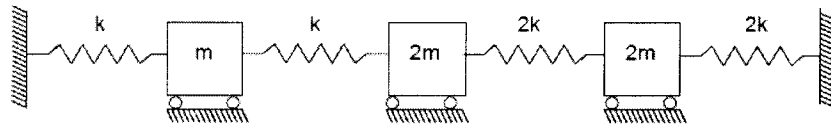
```
disp('Konstanta Integrasi');
S=inv(V)*x0
tk=linspace(0,2,101);
% evaluasi respon waktu
% kembali dinyatakan bahwa x1=y3 and x2=y4
for k=1:101
t=tk(k);
for i=3:4
x(k,i-2)=0;
for j=1:4
x(k,i-2)=x(k,i-2)+(real(S(j))*real(V(i,j))-
imag(S(j))*imag(V(i,j)))
*cos(imag(D(j,j))*t);
x(k,i-2)=x(k,i-2)+(imag(S(j))*real(V(i,j))-real(S(j))
*imag(V(i,j)))*sin(imag(V(i,j))*t);
x(k,i-2)=x(k,i-2)*exp(-real(D(j,j))*t);
end
end
end
plot(tk,x(:,1),'-',tk,x(:,2),'-');
title('Solution of problem E3.12')
xlabel('t[sec]')
ylabel('x(m)')
legend('x1(t)','x2(t)')
```



Gambar 7.22 Respons getaran problem 7.12

### Contoh 7.13

Sistem dengan 3 derajat kebebasan seperti yang diperlihatkan Gambar 7.23. Tulis program MATLAB jika diasumsikan  $k = m = 1$ , untuk mencari tiga frekuensi natural masing-masing benda bersesuaian dengan modus getar.



Gambar 7.23 Sistem 3-derajat kebebasan Contoh 7.13

**Jawab:**

Persamaan getaran dalam bentuk matriks dapat ditulis sebagai berikut:

$$M\ddot{x}(t) + Kx(t) = 0$$

Dengan  $x(t) = [x_1(t), x_2(t), x_3(t)]$  maka vektor displacement dengan:

$$\text{Matriks massa } M = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & 2m & 0 \\ 0 & 0 & 2m \end{bmatrix}$$

$$\text{Matriks stiffness } K = \begin{bmatrix} 2k & -k & 0 \\ -k & 3k & -2k \\ 0 & -2k & 4k \end{bmatrix}$$

Jawaban permasalahan dengan input program MATLAB:

```
k=1; % harga kekakuan
m=1; % harga asumsi massa
M=m*[1 0 0; 0 2 0; 0 0 2]; % pengisian matriks massa
K=k*[2 -1 0; -1 3 -2; 0 -2 4]; % matriks kekakuan
N=3;
R=chol(M); % teknik penyusunan matriks dengan cara Cholesky
L=R';
A=inv(L)*K*inv(L');
[x,W]=eig(A);
v=inv(L')*x;
for i=1:N,
    w1(i)=sqrt(W(i,i));
end
[w,I]=sort(w1);
disp('Tiga frekuensi natural modulus getar pertama')
disp(w(1))
disp(w(2))
```

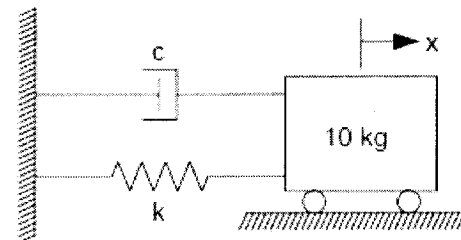
```
disp(w(3))
n=[1:N];
disp('Modus getar sesuai ortogonalitas massa yaitu')
for j=1:N,
    U(:,j)=v(:,I(j));
    U(:,j)=U(:,j)/(U(:,j)'*M*U(:,j));
    disp('mode-')
    disp(j)
    disp(U(:,j))
end
```

**7.9 Ringkasan**

Seiring semakin berkembang kapasitas CPU dan bahasa pemrograman maka peranti lunak yang berfungsi untuk membantu para scientis untuk mengembangkan dan mendapatkan hasil hitungan, termasuk analisis, juga menjadi semakin cepat dan akurat. MATLAB adalah salah satu peranti lunak yang sangat powerfull untuk memecahkan masalah getaran. Hal ini karena MATLAB memiliki koleksi perintah dan fungsi yang mudah dipahami. Di samping itu, MATLAB juga mampu memplot grafik parameter sistem getaran dengan baik, sehingga mempermudah ilmuwan ataupun mahasiswa yang berkecimpung dalam bidang getaran mekanis untuk menganalisis suatu sistem getar.

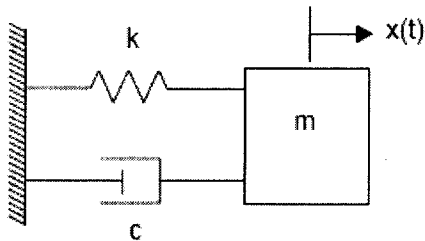
**7.10 Soal**

1. Sebuah kereta dengan massa 10 kg bergerak 25 cm ke kanan dari posisi keseimbangannya dan dilepas pada  $t = 0$  seperti terlihat pada gambar di bawah ini. Gunakan MATLAB untuk memplot displacement sebagai fungsi waktu untuk 4 kasus  $c = 10, 40, 50$  dan  $60 \text{ N.s/m}$ ,  $k = 40 \text{ N/m}$ !

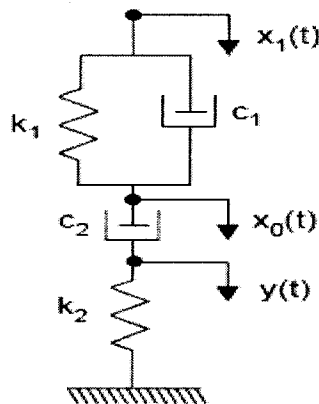


2. Tulislah skrip MATLAB untuk menghitung respons dari sistem satu derajat kebebasan *underdamped* seperti gambar di samping ini! Gunakan program tersebut untuk menentukan respons dari data berikut ini! Initial condition  $x(0) = 0$ ,  $\dot{x}(0) = 30 \text{ cm/s}$ ,  $\omega_n = 6 \text{ rad/s}$

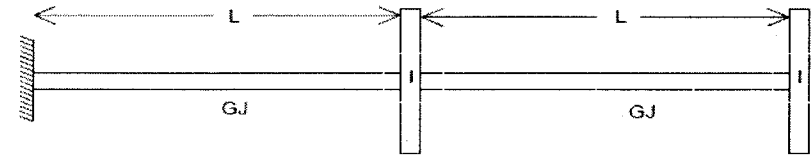
$$\zeta = 0,1, 0,4, 0,5$$



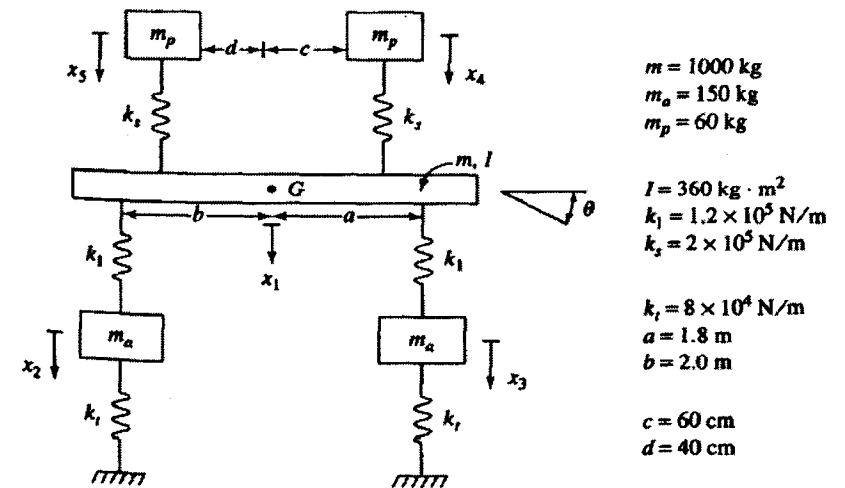
3. Tentukan dan plot respons dari sistem seperti yang terlihat pada gambar di bawah ini! Gunakan MATLAB. Responsnya adalah  $x_0(t)$  ketika input  $x_1(t)$  berupa unit step displacement input! Parameter sistem  $k_1 = 15 \text{ N/m}$ ,  $k_2 = 25 \text{ N/m}$ ,  $c_1 = 7 \text{ N.s/m}$  dan  $c_2 = 15 \text{ N.s/m}$



4. Sistem dua derajat kebebasan torsional seperti gambar di bawah ini dikenai eksitasi  $\theta_1(0) = 0$ ,  $\theta_2(0) = 2$ ,  $\dot{\theta}_1(0) = 2\sqrt{\frac{GJ}{IL}}$  dan  $\dot{\theta}_2(0) = 0$ .  
Tulislah program MATLAB untuk memplot respons sistem. Asumsikan  $I = 1$  dan  $GJ = 1$ .



5. Buatlah skrip MATLAB untuk mencari frekuensi natural dan modal matriks dari sistem di bawah ini.





## Daftar Pustaka

- Bhimadi, T., (2000). "Beda Hingga Eksitasi Solusi Persamaan Getaran Pegas Damper Toyota Kijang LSX dan Optimasi Harga Pegas Damper Menggunakan Gradien Projection Constraint Linear", Proceeding Experimental and Theoretical Mechanics, ITB-Bandung, ISBN 979-8294-04-1, 20-21 Juni.
- Bhimadi, T., (2003), "Kontrol Jumlah Produk dengan Rangkaian Mikrokontroler AT89C51 dan Prinsip Demokrasi", Prosiding Word Automation Seminar, Universitas Katolik Parahyangan – Bandung, ISBN 979-98176-0-9, 18-19 Desember.
- Bhimadi, T., (2004), "Penyimpangan Uji Fatigue 14 Spesimen Plat Berlubang Lebar 50 mm dan Tebal Sampai 8 mm SS-304 Beban Uniaksial", Prosiding Perencanaan dan Aplikasi Teknologi dalam Pembangunan, Universitas Muhammadiyah – Surakarta, ISSN 1412-9612, 11 Desember.
- Bhimadi, T., (2006), "Respons Heave Anjungan Empat Tiang Terhadap Eksitasi Gelombang Laut Persamaan Eksponensial", Makalah Progress Disertasi, Fakultas Teknologi Kelautan, ITS-Surabaya.
- Bhimadi, T., (2009), "Respons Transien Gradien Dua DOF Engine Kapal KM-PAX-500 dengan Metode Beda Hingga", Prosiding Rekayasa dan Aplikasi Teknik Mesin di Industri, ITENAS-Bandung, ISSN 1693-3168, 24-25 Nopember.
- Dukkipati, Rao V., (2007), *Solving Vibration Analysis Problems Using MATLAB*, New Delhi., New Age International (P) Ltd., Publishers.
- Hatch, Michael R., (2002), *Vibration Simulation With MATLAB and ANSYS*, Boca Raton., Chapman & Hall/CRC.

Thorby, Douglas., (2008), *Structural Dynamics and Vibration in Practice*, Amsterdam, Elsevier Ltd.

## This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.